Concours Centrale-Supélec, France

Session 2008, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : généralités sur les distances
- Partie II : décomposition polaire
- Partie III : distance à O_3(R)
- Partie IV : cas d'un sous-espace de dimension 6

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2008/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Centrale PSI Maths II 2008

Notations et définitions

- On désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ par la notation $\mathrm{diag}(a,b,c)$. Ainsi, $\mathrm{diag}(1,1,1)$ est la matrice identité I_3.
- L'espace vectoriel des matrices 3×3, noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, est muni du produit scalaire usuel :

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(\left({}^tA\right)B\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}b_{i,j}$$

- On note $\|\ \|$ la norme associée : $\|A\|^2 = \langle A,A\rangle$.
- On note $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques, et $\mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.
- Si $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et P est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la distance de A à P est, par définition :

$$d(A,P) = \inf_{B\in P}\|A-B\|$$

- Si P et Q sont deux parties non vides de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la distance entre P et Q est :

$$d(P,Q) = \inf_{A\in P,B\in Q}\|A-B\|$$

On a aussi (et on l'admettra) $d(P,Q) = \inf_{A\in P} d(A,Q)$.

Partie I - Généralités sur les distances

I.A - Si $A\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.

I.B - Démontrer que $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est une partie bornée. En déduire que $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.C - Démontrer que l'application $M\longmapsto\|M\|$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, est continue.

I.D - Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $U\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $d\left(A,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right) = \|A-U\|$.

I.E - Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = d\left(M,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)$.

I.E.1) Soient M, $N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\forall U\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\quad d\left(M,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)\leqslant\|N-U\|+\|N-M\|$$

puis que :

$$d\left(M,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)\leqslant d\left(N,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)+\|N-M\|$$

I.E.2) En déduire que Φ est continue.

I.F - Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $r\in\mathbb{R}^+$, on pose

$$B_r = \{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\|M\|\leqslant r\}$$

I.F.1) Démontrer qu'il existe $r>0$ tel que $d\left(P,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right) = d\left(P\cap B_r,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)$.

I.F.2) Démontrer qu'il existe $A\in P$ telle que $d\left(P,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right) = d\left(A,\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\right)$.

Partie II - Décomposition polaire

Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II.A - Démontrer que ${}^tMM$ est symétrique à valeurs propres positives.

II.B - Démontrer qu'il existe $S\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives telle que ${}^tMM = S^2$.

II.C - Démontrer que si M est inversible, il existe $U\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $M=US$.
On admettra que le résultat reste vrai si M est non inversible, c'est-à-dire : « si $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe $U\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S\in\mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ telles que $M=US$ (décomposition polaire) ».

II.D - Étude d'un exemple

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

En appliquant la méthode ci-dessus, déterminer $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ telles que $M = US$.

Partie III - Distance à $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$

III.A -

III.A.1) Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.

En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe une matrice D diagonale à coefficients positifs telle que :

$$d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$$

III.A.2) En déduire que si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe $\mathcal{W}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$;
- $d(\mathcal{W}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$;
- Il existe $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{W}$, où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$, telle que $d(\mathcal{W}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

III.B - Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$.

III.B.1) Si $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\|D - U\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2\right) - 2\langle U, D\rangle + 3$.

III.B.2) Si $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\langle U, D\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$.

III.B.3) En déduire que $d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$.

III.C - Étude d'un exemple

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ définie dans la question **II.D.**, calculer la distance $d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

Partie IV - Cas d'un sous-espace de dimension 6

IV.A - Dans cette question seulement, $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$.

IV.A.1) Soit $A \in \mathcal{V}$. En considérant les valeurs propres de ${}^tAA$, démontrer l'inégalité :

$$d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \geqslant 1$$

IV.A.2) Calculer $d(I_3, \mathcal{V})$ puis en déduire la valeur de $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

Dans toute la suite du problème, $\mathcal{V}$ désigne un sous-espace vectoriel de dimension 6 quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer que $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leqslant 1$.

À l'aide de la partie III, on se ramène au cas où $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$ avec $D = \operatorname{diag}(x, y, z) \in \mathcal{V}$ et $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. On suppose $D \neq I_3$, sinon $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = 0$ et l'inégalité est vraie.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \text{ et } R_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

IV.B - Comparer $(D - I_3)^\perp$ et $\mathcal{V}$.

IV.C - Vérifier que $(R_1'(0), R_2'(0), R_3'(0))$ est une famille libre formée de matrices orthogonales à $I_3 - D$.

Démontrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $aR_1'(0) + bR_2'(0) + cR_3'(0) \in \mathcal{V}$.

a, b, c sont ainsi fixés pour la suite, et on pose $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto R_1(at)R_2(bt)R_3(ct)$.

IV.D - Démontrer que f a un développement limité du type : $f(t) = I_3 + tA + t^2(B+C) + t^2\epsilon(t)$ avec $\epsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ où $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient :

- $A \in \mathcal{V}$;
- B orthogonale à $I_3 - D$;
- $C = \dfrac{1}{2}\text{diag}\left(-a^2-b^2, -a^2-c^2, -b^2-c^2\right)$.

Dans la suite, ϵ est la fonction apparaissant dans ce développement limité de f.

IV.E - Justifier que : $\left\|I_3 + t^2(B+C+\epsilon(t)) - D\right\| \geqslant \|I_3 - D\|$.

IV.F - Établir que : $\left\|I_3 + t^2(B+C+\epsilon(t)) - D\right\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, C\rangle + t^2\epsilon_2(t)$ avec $\epsilon_2(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.
Qu'en déduire sur $\langle I_3 - D, C\rangle$?

IV.G - Démontrer que l'un au moins des trois réels $2-x-y$, $2-y-z$, $2-x-z$ est négatif ou nul.
On suppose pour la suite, ce qui ne change rien, que $2 - x - y \leqslant 0$.

IV.H - Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

IV.I - Identifier géométriquement les ensembles suivants :

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = x+y+z\right\}$;
- $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y = 2\right\}$;
- $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y \geqslant 2\right\}$.

Justifier que $E \cap F$ est un cercle dont on donnera le rayon.
Quel est le diamètre de $E \cap G$ (c'est-à-dire la distance maximum entre deux de ses points) ?

IV.J - Démontrer que $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leqslant 1$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces vectoriels normés
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi