Concours Centrale-Supélec, France

Session 2009, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : valeurs propres de AB et BA
- Partie II : valeurs singulières d'une matrice
- Partie III : étude géométrique d'un exemple
- Partie IV : image de la sphère unité
- Partie V : pseudo-inverse d'une matrice

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2009/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière PSI

Calculatrices autorisées

Préliminaires

Dans le problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels ; $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles d'ordre n.

On peut ainsi écrire le produit scalaire $< X, Y >$ de deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ sous la forme ${}^tXY$ et la norme $||X|| = \sqrt{< X, X >}$ sous la forme $\sqrt{{}^tXX}$.
Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels, on note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme coefficients diagonaux.
On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on note $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathscr{B}}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
Si $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}_2 = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, on note $P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_2$.
Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f par rapport à la base $\mathscr{B}_1$ au départ et $\mathscr{B}_2$ à l'arrivée, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\big(f(e_1)\big)_{\mathscr{B}_2}$, $\big(f(e_2)\big)_{\mathscr{B}_2}$, $\ldots$, $\big(f(e_n)\big)_{\mathscr{B}_2}$.
En particulier, si $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 = \mathscr{B}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.

Partie I - Valeurs propres de AB et BA

Soit $n \geqslant 2$ un entier et A, B deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On propose de démontrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

I.A - Cas de la valeur 0.

I.A.1) Démontrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, $\det(AB) = 0$.

I.A.2) Démontrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, 0 est valeur propre de BA.

I.B - Soit λ une valeur propre réelle non nulle de AB, $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de AB associé à cette valeur propre λ.

I.B.1) Démontrer que les vecteurs ABX et BX sont non nuls.

I.B.2) Démontrer que le vecteur BX est vecteur propre pour la matrice BA.

I.B.3) Démontrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles.

I.C - On suppose que A est inversible. On note I la matrice identité d'ordre n.

I.C.1) En factorisant de deux façons différentes la matrice $ABA - xA$, démontrer que pour tout x réel ou complexe, on a : $\det(AB - xI) = \det(BA - xI)$.

I.C.2) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec le même ordre de multiplicité.

On admet que ce résultat est encore vrai si A n'est pas inversible.

- version du 12 mars 2009 10h51

Partie II - Valeurs singulières d'une matrice

Dans cette partie II, on fixe un entier n, $n \geqslant 2$, une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \text{rg}\,(A)$.
On note f et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique $\mathscr{B}$ sont respectivement A et ${}^tAA$.

II.A - Diagonalisation de $A\,{}^tA$ et de ${}^tAA$.

II.A.1)

a) Démontrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\quad AX = 0 \Longrightarrow {}^tAAX = 0$.

b) On suppose que $X \in \mathbb{R}^n$ est tel que ${}^tAAX = 0$.

Calculer ${}^tX\,{}^tAAX$ et en déduire que $AX = 0$.

c) En déduire que Ker $g =$ Ker f puis que $rg(A) = \text{rg}\,({}^tAA)$.

II.A.2) Démontrer que ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont deux matrices symétriques.

II.A.3) En utilisant la partie I, démontrer qu'il existe $P, Q \in O(n)$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

${}^tAA = PD\,{}^tP$ et $A\,{}^tA = QD\,{}^tQ$

On pose $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

II.A.4) Démontrer que D possède exactement r termes diagonaux non nuls.

On suppose par la suite que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont non nuls et donc

$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

II.A.5)

a) En utilisant ${}^tAA = PD\,{}^tP$, démontrer qu'on peut écrire D sous la forme ${}^tMM$, avec $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty[$.
Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle « valeurs singulières de A » les n nombres σ_i définis par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

II.A.6) Soient $U, V \in O(n)$.
Démontrer que les valeurs singulières de UAV sont exactement celles de A.

II.A.7) Dans cette question seulement, on suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle.
Déterminer les valeurs singulières de A en fonction des valeurs propres de A.

II.B - On rappelle que $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et ${}^tAA = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ et dans cette section, on note $\rho = \text{rg}\,({}^tAA) = \text{rg}\,(g)$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathscr{B}_1 = (X_1, \ldots, X_n)$ telle que :

- Pour tout entier $i \in [1, \rho]$, ${}^tAAX_i = \lambda_i X_i$;
- $(X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$ soit une base de Ker f.

II.B.2) Démontrer que la famille $(AX_1, \ldots, AX_\rho)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et une base de Im (f).

II.B.3) Pour tout entier $i \in [1, \rho]$, calculer $||AX_i||$.

II.B.4) Démontrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$\text{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f) = \text{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

II.B.5) Démontrer qu'il existe deux matrices orthogonales $P_1, P_2 \in O(n)$ telles que

$A = P_1 \cdot \text{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \cdot P_2$.

II.C -

II.C.1) Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R}^+$ des réels positifs.
Démontrer qu'il existe deux matrices Q_1 et Q_2 dans $O(n)$ telles que :
$A = Q_1 \cdot \text{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \cdot Q_2 \Longleftrightarrow \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les valeurs singulières de A.

II.C.2) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles. Démontrer que :
A et B ont les mêmes valeurs singulières $\Longleftrightarrow \exists (R_1, R_2) \in O(n)^2, A = R_1 B R_2$.

Partie III - Étude géométrique d'un exemple

Dans cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

III.A - Dans cette section, on utilise les notations et résultats de la partie II.

III.A.1) Déterminer le rang de A et calculer ${}^tAA$.

III.A.2) Déterminer les valeurs singulières de A que l'on notera $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

III.A.3) Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$ que l'on notera $\mathscr{B}_1 = (X_1, X_2, X_3)$.
On rangera les vecteurs dans l'ordre décroissant des valeurs propres correspondantes.

III.A.4) Déterminer une base orthonormée $\mathscr{B}_2 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

III.A.5) Démontrer que $A = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_2} \cdot \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot {}^tP_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_1}$.
On pose pour la suite $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_1}$, $Q = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}_2}$ et $D = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

III.B - On étudie la partie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathcal{S} = \{AX\,;\, X \in \mathbb{R}^3, ||X|| = 1\} = \{f(x)\,;\, x \in \mathbb{R}^3, ||x|| = 1\}.$$

C'est donc l'ensemble décrit par $f(x)$ quand x décrit l'ensemble des vecteurs de norme 1 (sphère unité de $\mathbb{R}^3$).

III.B.1) Démontrer que $\mathcal{S}$ est une partie d'un plan dont on déterminera une base et une équation cartésienne.

III.B.2) Démontrer que $\mathcal{S} = \{QDX', X' \in \mathbb{R}^3, ||X'|| = 1\}$.

III.B.3) Démontrer que dans une base adaptée $\mathscr{B}'$ à déterminer,

$$y = (y_1, y_2, y_3)_{\mathscr{B}'} \in \mathcal{S} \iff \begin{cases} \dfrac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y_2^2}{\sigma_2^2} \leqslant 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

III.B.4) Préciser la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Partie IV - Image de la sphère unité

Dans cette partie, comme dans la Partie III, A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on étudie $\mathcal{S}$ l'ensemble $\mathcal{S} = \{AX\,;\, X \in \mathbb{R}^3, ||X|| = 1\}$.

IV.A -

Dans cette section on suppose que $\mathrm{rg}\,(A) = 3$.

IV.A.1) Démontrer que A admet trois valeurs singulières $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ strictement positives, distinctes ou non.

IV.A.2) Démontrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathscr{B}'$ telle que :

$$y = (y_1, y_2, y_3)_{\mathscr{B}'} \in \mathscr{S} \iff \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

IV.A.3) Préciser la nature géométrique de $\mathscr{S}$.

IV.B -

Dans cette section, on suppose que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

IV.B.1) Démontrer qu'une seule des valeurs singulières de A est non nulle.
On la note σ_1.

IV.B.2) Démontrer que $\mathscr{S}$ est un segment dont on donnera la longueur.

Partie V - Pseudo-inverse d'une matrice

Soit n un entier, $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, qu'on écrit, comme dans la Partie II, sous la forme $A = Q_1 \cdot \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p, 0, \ldots, 0) \cdot Q_2$, où $Q_1, Q_2 \in O(n)$ sont deux matrices orthogonales et $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ des réels strictement positifs.

On définit le pseudo-inverse A^+de A par

$$A^+ = {}^tQ_2 \cdot \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_p}, 0, \cdots, 0\right) \cdot {}^tQ_1$$

On pose $P = AA^+$.

V.A - Démontrer que $rg(A) = p$.

V.B - Simplifier le produit matriciel AA^+ et en déduire que, si A est une matrice inversible, $A^+ = A^{-1}$.

V.C - On note f et h les endomorphismes $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et P.

Démontrer que h est un projecteur orthogonal dont on donnera le rang.

V.D - Démontrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(h)$.

V.E - Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé.

On considère le système linéaire $AX = Y$, où $X \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnu. On suppose que ce système n'a pas de solution et, à défaut, on recherche les vecteurs X tels que la norme de $Y - AX$ soit minimale.

Démontrer que $X = A^+Y$ est l'un de ces vecteurs.

• • • FIN • • •

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi