Concours Centrale-Supélec, France

Session 2009, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude du système et des prestations attendues
- Partie II : phase de mise en rotation du rotor
- Partie III : performances d'un palier magnétique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2009/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

Calculatrices autorisées

Pompe turbo-moléculaire

Partie I - Étude du système et des prestations attendues

Les semi-conducteurs sont des composants électroniques essentiels dans de multiples applications telles que les ordinateurs, les téléphones portables, les calculatrices, les appareils photographiques, les téléviseurs, etc. Leur fabrication est extrêmement complexe et coûteuse. Des connexions électriques d'une dimension de quelques nanomètres interconnectent jusqu'à un milliard de transistors sur une surface de l'ordre du centimètre carré. Ces circuits sont réalisés par photolithographie : une résine photosensible (conductrice ou isolante) est déposée sur la surface puis un flash ultra-violet est appliqué derrière un masque, imprimant le circuit sur la surface qui est ensuite nettoyée du surplus de résine non imprimée.



Figure 1 - Machine de traitement de la plaque semi-conductrice

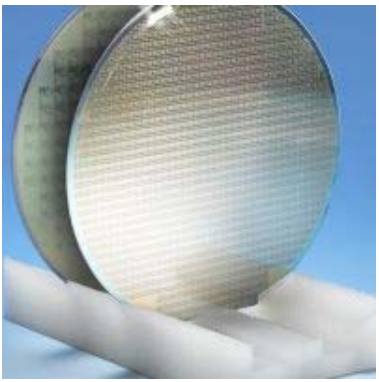


Figure 2 - Plaques semi-conductrices après traitement. Le diamètre d'une plaque est de l'ordre de 30 cm

La fabrication des semi-conducteurs nécessite une précision et une propreté extrêmes. La moindre poussière ou défaut de positionnement peut compromettre la réussite de l'opération. L'ensemble de la production est par conséquent réalisé en chambre blanche (local dont l'air est filtré). La machine de traitement est essentiellement constituée d'une cellule étanche dans laquelle sont placées les plaques semi-conductrices. Les dépôts et le

Filière PSI

nettoyage se font par introduction de gaz, souvent très corrosifs, dans la cellule. La maîtrise de la qualité de la fabrication nécessite une pompe capable d'évacuer ces gaz et de créer un vide de l'ordre de 10^{-9} mbar dans la cellule. Cette pompe, appelée « pompe turbo-moléculaire », est l'objet de l'étude. À ce niveau de vide, le rotor à ailettes est conçu pour capturer les dernières molécules présentes (figure 3). Sa vitesse de rotation est de l'ordre de $30\ 000$ tr/min . L'environnement impose un cahier des charges très strict vis-à-vis de la pompe turbo-moléculaire. Aucune pollution n'est tolérée et la pompe ne doit transmettre aucune vibration au support malgré la vitesse de rotation élevée.

On s'intéresse dans ce sujet aux contraintes de conception de la pompe turbo-moléculaire et particulièrement au guidage du rotor à ailettes.

I.A - Étude des prestations attendues

Objectif : justifier, compte tenu des performances attendues, le choix d'une solution de guidage en rotation par paliers magnétiques.

L'environnement de la pompe turbo-moléculaire, au cours de la phase d'utilisation, est partiellement modélisé sur le diagramme des interacteurs figure 4.

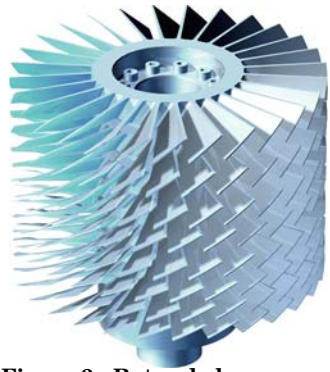


Figure 3 - Rotor de la pompe permettant de capturer les molécules

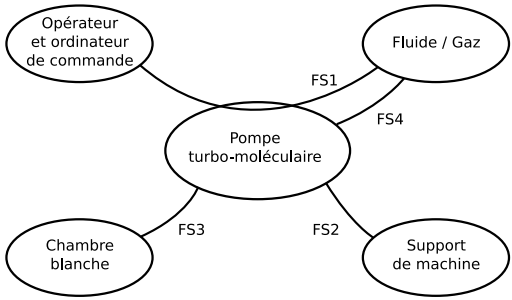


Figure 4 - Diagramme partiel des interacteurs

Les différentes fonctions de service sont identifiées et traduites en terme de cahier des charges, dont un extrait est donné dans le tableau page suivante.

Fonctions	Critères et niveaux
$FS1$: permettre à l'opérateur d'extraire le gaz de la capsule de fabrication	Débit : 300 l/s Pression d'entrée : 5×10^{-4} mbar Pression de sortie : 0, 1 mbar Type de fluide : air, chlore, vapeurs, etc (corrosif) Temps de mise en service : 3 min Vitesse de rotation maximale : $\omega_{max} = 30\ 000$ tr/min
$FS2$: ne pas transmettre d'efforts au support de la machine	Effort radial généré par le défaut d'équilibrage statique : $F_R < 5$ N
$FS3$: ne pas polluer la chambre blanche lors du fonctionnement ou de la maintenance	Lubrifiant : aucun Usure de pièces : aucune
$FS4$: s'adapter aux variations de pression du gaz	Variation de pression : 1 bar → 0 bar Aucune étanchéité par joint entre une partie tournante et une partie fixe

Q - 1) Proposer un diagramme $A-0$ de la pompe turbo-moléculaire.

Une solution classique de guidage d'un arbre tournant 1 par rapport à un carter 0 est fournie figure 5.

Q - 2) Nommer les deux composants utilisés pour ce guidage et proposer un schéma cinématique du guidage réalisé par cette solution en justifiant vos choix.

Q - 3) Citer les critères du cahier des charges non satisfaits par cette solution classique de guidage en rotation.

La fabrication du rotor (de masse $m = 10$ kg) est très précise et permet de réduire le défaut de balourd à des valeurs minimales : le fabricant assure un centre de gravité G positionné sur l'axe de rotation avec une précision de l'ordre du millième du rayon du rotor, soit une distance du point G à l'axe de rotation de $r_0 \approx (0,05\ \text{mm})$. On suppose dans tout le sujet que l'axe du rotor est vertical.



Figure 5 - Vue 3D d'un guidage classique en rotation

Q - 4) Montrer que le modèle de guidage rigide défini par votre schéma cinématique conduit au non respect du critère d'équilibrage statique du cahier des charges. Dans quelles mesures peut-on critiquer ce modèle ?

Conclusion : pour satisfaire les critères de performances exigés par le CdCF , le constructeur a eu recours à un guidage en rotation du rotor par l'intermédiaire de Paliers Magnétiques.

I.B - Étude structurelle de la solution de guidage par paliers magnétiques

Objectif : comprendre l'architecture du guidage par paliers magnétiques

Les paliers magnétiques sont conçus, réalisés et montés par la société S2M. Deux paliers radiaux assurent le guidage radial de l'arbre (figure 7). Un troisième palier assure le guidage axial. Un moteur électrique, placé entre les deux paliers radiaux, entraîne le rotor en rotation.

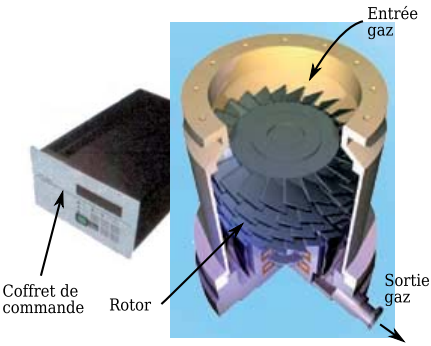


Figure 6 - Vue en écorché de la pompe et du coffret de commande

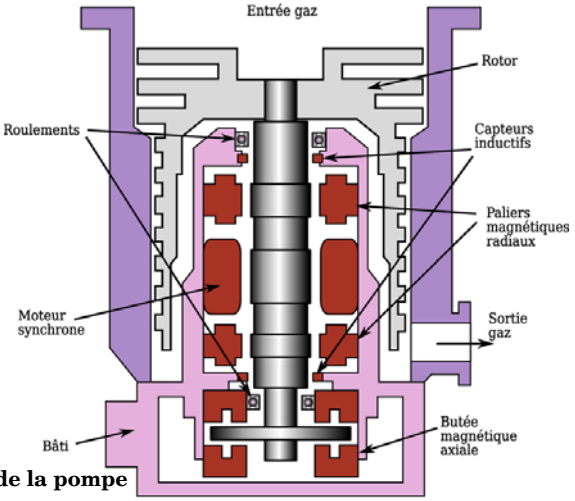


Figure 7 - Vue en coupe de la pompe

Le guidage magnétique consiste à exercer des efforts sur l'arbre en générant un champ magnétique. Il n'y a donc aucun contact entre le bâti et l'arbre, ce qui offre plusieurs avantages :

- aucune usure des pièces,
- aucune lubrification nécessaire,
- aucun couple de frottement.

Le champ magnétique est produit par des bobinages placés autour de l'arbre sur le bâti. Des capteurs inductifs permettent de mesurer la position de l'arbre. Le coffret de commande, contenant l'amplificateur de courant et une carte de commande (voir figure 6), reçoit cette information et assure un asservissement en position de l'arbre : dès lors qu'un écart de position est mesuré, un courant est produit afin de générer un effort sur l'arbre permettant de le remettre en position.

Q - 5) Expliquer la présence de roulements dans la solution de guidage par paliers magnétiques.

Q - 6) Compléter le diagramme $SADT\ A0$ du document réponse figure 8.

Q - 7) En considérant que les paliers magnétiques n'assurent pas une liaison parfaitement rigide du rotor, indiquer le nombre de degrés de liberté autorisés dans le mouvement du rotor par rapport au bâti. Combien de degrés de liberté le guidage doit-il interdire pour assurer un fonctionnement correct ?

Conclusion : le SADT montre l'interaction entre la partie commande et la partie mécanique. La modélisation de ces deux aspects sera nécessaire pour évaluer la capacité du système à satisfaire le cahier des charges. Après avoir mis en évidence certaines simplifications dans le cadre du système étudié (partie - II), une modélisation de l'asservissement sera proposée (Partie - III) suivie d'une modélisation de la dynamique du rotor (Partie - IV).

Partie II - Étude de la phase de mise en rotation du rotor

Objectif : valider les critères du cahier des charges lors de la mise en rotation du rotor et formuler des hypothèses simplificatrices.

II.A - Validation du temps de mise en service

La modélisation adoptée est la suivante :

- Le rotor est en mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{z}_0$, le moment d'inertie autour de son axe est évalué à $J = 0,04\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.
- Le moteur d'entraînement crée un couple moteur $C_m\vec{z}_0$ avec $C_m = 0,8\ \text{Nm}$.
- Sa vitesse de rotation est notée $\vec{\Omega}(\text{rotor}/0) = \omega(t)\vec{z}_0$.
- Tous les frottements sont négligés.
- À la date $t = 0\ \text{s}$, on considère que la mise en rotation du rotor débute.

Q - 8) Déterminer l'équation de mouvement du rotor dans la phase de démarrage. Valider le critère de temps de mise en service associé à la fonction de service $FS1$.

Q - 9) Déterminer alors la valeur numérique du coefficient de proportionnalité μ tel que $\omega(t) = \mu t$. (Cette valeur sera utilisée par la suite.)

II.B - Hypothèses simplificatrices

On considère que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| << |y|$ lorsque $|y| \geq 10|x|$.

Q - 10) À partir de quelle vitesse de rotation du rotor, $\omega_{\min}$, peut-on considérer que $|\dot{\omega}| << \omega^2$? Comparer cette valeur à la vitesse de rotation maximale du rotor.

Conclusion : ces résultats et hypothèses seront utilisés dans la validation des performances du guidage en phase de rotation dans la Partie IV.

Partie III - Validation des performances d'un palier magnétique en statique

Objectif : établir les lois de comportement d'un palier magnétique et déterminer le correcteur permettant de satisfaire les performances exigées.

Afin de pré-dimensionner les paliers magnétiques, on adopte pour chaque palier le cahier des charges suivant :

Effort maximal transmissible sur chaque palier		$F = 300$ N
Déplacement maximal autorisé		Jeu dans les paliers magnétiques de $0,2$ mm
Stabilité de l'asservissement	Marge de phase	$60°$
	Marge de gain	12 dB
Sensibilité aux perturbations	Amortissement	$\xi = 0,4$
	Bande passante à -3 dB	$\omega_{max}/10$
	Déplacement en régime permanent vis-à-vis d'une perturbation constante	nul

(On rappelle que ω_{max} est la vitesse de rotation maximale du rotor).



Figure 9 - Composants d'un palier magnétique

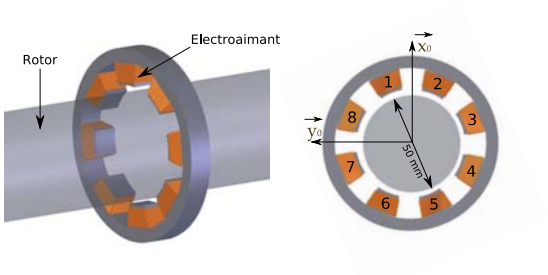


Figure 10 - Illustration des bobinages d'un palier magnétique

Un palier magnétique radial est constitué de 8 électro-aimants. Les électro-aimants sont associés deux à deux et par paires diamétralement opposées. Ainsi les électro-aimants 1, 2 et 5, 6 assurent l'effort selon $\vec{x}_0$ et les électro-aimants 3, 4 et 7, 8 assurent l'effort selon $\vec{y}_0$.

III.A - Modélisation du comportement d'un couple d'électro-aimants

Objectif : vérifier la compatibilité des électro-aimants choisis avec les spécifications de fonctionnement.

L'étude porte dans un premier temps sur un seul couple d'électro-aimants, comme représenté figure 11.

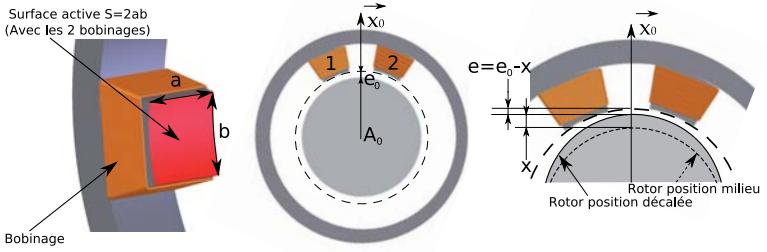


Figure 11 - Couple d'électro-aimants

Lorsque le bobinage, enroulé autour de fines plaques en fer doux, est alimenté par un courant I, un champ magnétique B apparaît dans l'entrefer entre l'électro-aimant et le rotor, tel que $N \cdot I = \dfrac{2e}{\mu_0} \cdot B$.

Ce champ magnétique permet de créer un effort exercé par l'électro-aimant sur le rotor, dans l'axe de l'électro-aimant, tel que

$F = \dfrac{B^2 S}{2\mu_0}$ où $S = 2ab$ est la surface active du couple d'électro-aimants (voir figure 11).

Spécifications de fonctionnement :

- l'échauffement maximal des bobinages impose une intensité maximale telle que $I_{max} = 5$ A ,
- le champ magnétique maximal dans un matériau ferro-magnétique est limité à $B_{max} = 1,8$ T .

Données numériques	
nombre de spires	$N = 200$ spires
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H · m^{-1}
valeur moyenne e_0 de l'entrefer	$e_0 = 0,2$ mm
diamètre de l'arbre	$d = 50$ mm
surface active	$S = 300$ mm^2

On note $\vec{F} = F\vec{x}_0$ l'effort exercé par le couple des électro-aimants sur le rotor selon $\vec{x}_0$.

Q - 11) Montrer que le couple des deux électro-aimants permet d'assurer l'effort maximal transmissible tout en respectant les spécifications de fonctionnement.

Un déplacement x, tel que $\overrightarrow{A_0A} = x\vec{x}_0$, de l'arbre par rapport au stator conduit à une modification de l'effort exercé F. On note e_0 l'entrefer initial pour $x = 0$ tel que $e = e_0 - x$.

Q - 12) Déterminer l'expression de l'effort F en fonction de x, de I et de paramètres géométriques. Peut-on exercer un effort $\vec{F}$ suivant $-\vec{x}_0$ en modifiant I ou e ? Déterminer la valeur numérique de la constante γ telle que $F = \gamma \cdot \frac{I^2}{e^2}$.

Conclusion : afin de maîtriser la position du rotor, le constructeur a choisi d'associer les couples d'électro-aimants par paires diamétralement opposées.

III.B - Modélisation d'un palier magnétique actif

Objectif : établir le modèle de comportement du palier magnétique.

Les couples d'électro-aimants sont associés par paires diamétralement opposées. On ne s'intéresse ici qu'au contrôle de la position du rotor selon $\vec{x}_0$ réalisé par les électro-aimants 1, 2, 5 et 6. Pour simplifier :

- le couple des électro-aimants 1 et 2 crée un effort de norme F_1 sur le rotor,
- le couple des électro-aimants 5 et 6 crée un effort de norme F_2 sur le rotor.

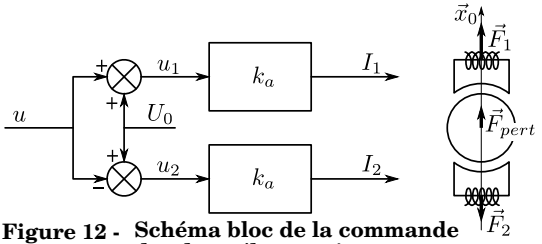


Figure 12 - Schéma bloc de la commande des deux électro-aimants

$$\vec{F}_1 = (F_0 + dF_1)\vec{x}_0$$
$$\vec{F}_2 = -(F_0 + dF_2)\vec{x}_0$$
$$I_1 = I_0 + dI_1$$
$$I_2 = I_0 + dI_2$$
$$u = 0 + du$$
$$x = 0 + dx$$

Le point de fonctionnement de chaque couple d'électro-aimants est caractérisé par $x = 0$, $I = I_0$ et $F = F_0$ (voir figure 12). On admet que le comportement se traduit par un effort dirigé de l'axe du rotor vers l'électro-aimant tel que

$$F_1 = \gamma \cdot \frac{I_1^2}{e_1^2} \text{ et } F_2 = \gamma \cdot \frac{I_2^2}{e_2^2} \text{ avec } \gamma = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot A^{-2}}.$$

L'architecture de la commande est proposée figure 12. On note $\vec{F}_{\text{pert}} = F_{\text{pert}}\vec{x}_0$ un effort perturbateur s'exerçant sur le rotor.

Q - 13) On note désormais $\vec{F}_T = F_T \vec{x}_0$ l'effort total exercé par les deux couples d'électro-aimants. Montrer que l'expression linéarisée de F_T peut s'écrire en fonction de u et x sous la forme :

$$F_T = \frac{4 \cdot \gamma \cdot k_a^2 \cdot U_0^2}{e_0^2}\left(\frac{u}{U_0} + \frac{x}{e_0}\right)$$

En première approximation, la masse $m = 10\ \text{kg}$ du rotor se répartit équitablement au centre de chaque palier magnétique radial. Ceci revient à étudier le comportement dynamique d'une masse ponctuelle (masse $m/2$) placée au centre de chaque palier magnétique radial.

Q - 14) Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse ponctuelle (de masse $m/2$) et en déduire une relation entre F_T, F_{pert} et x. Compléter le schéma bloc figure 13 (document réponse) du palier magnétique ayant pour entrée la tension u et pour sortie la position x, et faisant apparaître l'effort perturbateur F_{pert}.

Q - 15) Déterminer la fonction de transfert

$H_{PM}(p) = \frac{X(p)}{U(p)}$. Le système est-il stable ? Justifier.

Conclusion : le palier magnétique nécessite une boucle d'asservissement, qui est étudiée dans la partie suivante.

III.C - Asservissement de position du palier magnétique actif

Objectif : déterminer la structure et les paramètres du correcteur à utiliser pour satisfaire les performances exigées.

Afin de satisfaire les critères du cahier des charges, on envisage d'asservir le palier magnétique par un premier bouclage de stabilisation (retour $K_D p + K_P$). Un second retour unitaire associé à un correcteur $C(p)$ assure la régulation en position du palier (figure 14 du document réponse). On utilisera par la suite les paramètres suivants : $K_e = 5000\ \text{V/m}$, $K_0 = 190\ \text{N/m}$, $m = 10\ \text{kg}$.

On considère dans un premier temps le système sans correction : $C(p) = 1$.

Q - 16) Déterminer la fonction de transfert de la boucle interne $H_{PM\ I}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$, en fonction de K_e, K_0, m, K_P et K_D. Préciser les conditions sur K_D et K_P pour que $H_{PM\ I}(p)$ soit stable en boucle ouverte.

Q - 17) En considérant l'ensemble de l'asservissement figure 14, déterminer la fonction de transfert $H_{\text{pert}}(p) = \frac{X(p)}{F_{\text{pert}}(p)}$, puis calculer les valeurs de K_D et K_P permettant de respecter les spécifications du cahier des charges en terme de

bande passante et d'amortissement (vous pourrez utiliser pour cette question l'abaque figure 15 du document réponse).

Q - 18) Tracer l'allure des diagrammes de Bode asymptotique et réel de la fonction de transfert de la boucle interne $H_{PM\,I}(p)$ et préciser la pulsation de coupure ainsi que les marges de gain et de phase. Valider les critères de stabilité du cahier des charges.

L'ouverture et la fermeture des arrivées de gaz sont assurées par des « vannes guillotines ». À la suite de la fermeture de la guillotine, le palier est soumis à un effort bref mais violent, qui peut être modélisé par une perturbation d'effort en échelon d'amplitude F_G.

Q - 19) Conclure quant au critère de sensibilité vis-à-vis des perturbations.

Afin d'améliorer les performances du système, on utilise un correcteur de fonction de transfert :

$$C(p) = K_i\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right).$$

Q - 20) Quelle performance est directement améliorée par ce correcteur ? (justifier votre réponse sans calcul).

Q - 21) Tracer l'allure du diagramme de Bode du correcteur en précisant les valeurs caractéristiques. Expliquer comment choisir K_i et T_i afin de conserver des marges de gain, de phase, et une pulsation de coupure proches de celles obtenues sans correction ($C(p) = 1$). Proposer des valeurs numériques.

On admet que le correcteur influe peu sur le temps de réponse et les dépassements lorsque les marges de stabilité et la pulsation de coupure sont conservées. On garde par conséquent les valeurs de K_P et K_D obtenues précédemment.

Conclusion : nous avons donc désormais dimensionné les deux boucles d'asservissement successives permettant d'obtenir les performances attendues du palier magnétique.

Afin de préparer la prochaine partie, relative à l'étude dynamique du rotor, on recherche un modèle simple de l'effort du palier magnétique actif en fonction du déplacement x de l'arbre, dans une gamme de vitesses de rotation raisonnables variant de $10\,000\ \text{tr/min}$ *à* $30\,000\ \text{tr/min}$.

Q - 22) Déterminer la fonction de transfert $K(p)$ telle que $F_T(p) = K(p)X(p)$. À partir de simplifications justifiées, montrer que dans la plage de fréquences considérée, l'effort $F_T(t)$ peut s'écrire sous la forme d'un modèle ressort amortisseur $F_T(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t)$ où vous préciserez les valeurs numériques de k et c. Comment évolue le modèle lorsque ω augmente au delà de cette plage de fréquences ?

Partie IV - Validation des performances du guidage en rotation en phase de rotation

Objectif : analyser le comportement dynamique du rotor en phase de rotation, en vue de vérifier les critères du cahier des charges de la pompe.

Le cahier des charges de la pompe en fonctionnement est le suivant :

Mouvement de l'arbre dans les paliers radiaux dans la zone admissible, inférieur au jeu autorisé, quelle que soit la vitesse de rotation	Déplacement de $0,2$ mm maxi
Effort vibratoire exercé sur le palier compatible avec les opérations de production	$F_{\max} = 5$ N
Fonctionnement normal éloigné d'une fréquence propre du système	$\omega_{nominal}$ à plus de 10% des fréquences propres
Stabilité du rotor pour toute la gamme des vitesses de rotation	$\omega \in [0, \omega_{\max}]$ et $\omega_{\max} = 30\,000$ tr/min

IV.A - Paramétrage géométrique et cinématique

Objectif : justifier les hypothèses simplificatrices adoptées.

Le comportement dynamique du rotor est étudié sur un modèle à 6 degrés de liberté : le rotor n'étant en contact avec aucun solide, il dispose des 6 mouvements de corps rigide. On suppose le rotor indéformable. La figure 16 montre à gauche le rotor dans sa position nominale $(\alpha = \beta = \theta = x = y = z = 0)$ et à droite le rotor dans une position quelconque. On note A_0 et B_0 les centres des paliers magnétiques radiaux et A et B les points appartenant à l'arbre et confondus avec A_0 et B_0 dans la position nominale.

On note O le milieu de $[A_0B_0]$ et M le milieu de $[AB]$. Bien qu'un soin très important soit apporté à la fabrication du rotor, il est impossible d'annuler totalement les défauts d'équilibrage. Le centre de gravité G n'est donc pas exactement situé sur l'axe (AB), mais à une distance r_0 de celui-ci telle que $\overrightarrow{MG} = r_0\vec{y}_3$.

De même, la matrice d'inertie $I_{G,3}$ n'est pas parfaitement diagonale et présente un produit d'inertie D non nul. On admet toutefois que $r \ll L$ et $D \ll (A, B, C)$, où A, B et C sont les moments d'inertie. Le mouvement du rotor, auquel on associe le repère 3, par rapport au bâti est paramétré par les trois déplacements (x, y, z) du point M dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ ainsi que par trois rotations (α, β, θ) telles que :

- α paramètre la rotation d'une base $B_1(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à B_0 autour de l'axe $\vec{x}_0$,
- β paramètre la rotation d'une base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ par rapport à B_1 autour de l'axe $\vec{y}_1$,
- θ paramètre la rotation d'une base $B_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$, liée au rotor, par rapport à B_2 autour de l'axe $\vec{z}_2$.

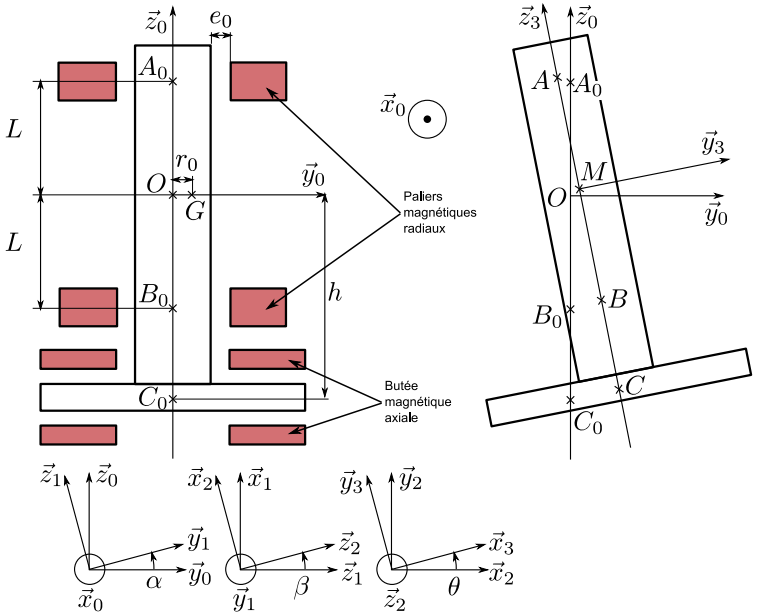


Figure 16 - Paramétrage de la géométrie et du mouvement du rotor

Si le rotor présente 6 degrés de liberté, il est bien évident qu'excepté la rotation propre principale θ, ces mouvements sont très petits.

En notant $\varepsilon(x)$ une fonction telle que $|\varepsilon(x)| << |x|$, on peut écrire : $\begin{cases} x, y, z \approx \varepsilon(L) \\ \alpha, \beta \approx \varepsilon(1) \end{cases}$

On suppose que la vitesse de rotation du rotor est constante : $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$.

Efforts des paliers et du moteur sur le rotor

Pour le dimensionnement dynamique, on modélise les actions des trois paliers magnétiques et l'action du moteur électrique sous la forme :

$$\{T_{0\to 3A}\} = \left\{\begin{matrix} X_A\vec{x}_0 + Y_A\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A \qquad \{T_{0\to 3B}\} = \left\{\begin{matrix} X_B\vec{x}_0 + Y_B\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$$

$$\{T_{0\to 3C}\} = \left\{\begin{matrix} Z_C\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C \qquad \{T_{\text{moteur}\to 3}\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_m\vec{z}_0 \end{matrix}\right\}_G$$

où les composantes des efforts sont celles calculées dans la Partie - III, sous la forme d'une raideur et d'un amortissement linéaires :

$$\begin{cases} X_A\vec{x}_0 + Y_A\vec{y}_0 = -k[\overrightarrow{A_0A}]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} - c[\vec{V}_{A,3/0}]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} \\ X_B\vec{x}_0 + Y_B\vec{y}_0 = -k[\overrightarrow{B_0B}]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} - c[\vec{V}_{B,3/0}]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} \\ Z_C = -k\overrightarrow{C_0C}\cdot\vec{z}_0 - c\vec{V}_{C,3/0}\cdot\vec{z}_0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} k = 50\cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1} \\ c = 970 \text{ N}/(\text{m.s}^{-1}) \end{cases}$$

où la notation $[\vec{V}]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}$ désigne la projection dans le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ du vecteur $\vec{V}$. Les actions de la pesanteur sont négligées. Le bâti est supposé être un référentiel galiléen.

Eléments d'inertie du rotor

Le rotor, tel que $L = 50$ mm, a pour masse $m = 10$ kg, pour centre de gravité G tel que $\overrightarrow{MG} = r_0\vec{y}_3$ où $r_0 = 0,05$ mm, et pour matrice d'inertie en G :

$$I_{G,3} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{B_3} \text{ où } \begin{cases} A = 0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ C = 0,04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\ D = 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{cases}$$

On admet que $r_0 \approx \varepsilon(L)$ et $D \approx \varepsilon(A) \approx \varepsilon(C)$.

Q - 23) En supposant que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions sinusoïdales sous la forme $\alpha(t) = \alpha_0\cos(\omega t)$, où $\alpha_0 \approx \varepsilon(1)$, montrer que $\dot{\alpha}(t) \approx \varepsilon(\omega)$ et $\dot{\alpha}^2 \approx \varepsilon(\omega^2)$.

Conformément aux hypothèses vues dans la Partie II, on considérera ici que :

- L'accélération angulaire du rotor autour de son axe de rotation est constante : $\omega(t) = \mu t$ avec $\mu = 20 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$.
- Dans toute la phase de mise en rotation, l'hypothèse $\dot{\omega} = \varepsilon(\omega^2)$ est validée.

Conclusion : ces hypothèses vont nous permettre de mettre en place le modèle dynamique dans la partie suivante.

IV.B - Modèles de comportement dynamique du rotor

Objectif : proposer un modèle de comportement dynamique du rotor en phase de rotation.

Q - 24) Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au rotor et l'exprimer sous forme torsorielle.

Les questions suivantes visent à déterminer le système d'équations issu de cette équation torsorielle.

Q - 25) Montrer que, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre de la vitesse du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti s'écrit : $\vec{V}_{G,3/0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 - r_0\omega\vec{x}_3$.

Q - 26) Déterminer, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre de l'accélération du centre de gravité G du rotor par rapport au bâti 0 : $\vec{\Gamma}_{G,3/0}$.

On admet que par changement de base, la matrice $I_{G,3}$ s'écrit dans la base B_2 :

$$I_{G,3} = \begin{pmatrix} A & 0 & D\sin\theta \\ 0 & A & -D\cos\theta \\ D\sin\theta & -D\cos\theta & C \end{pmatrix}_{B_2}$$

Q - 27) Montrer que, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre du moment cinétique en G du rotor par rapport au bâti s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{G,3/0} = \begin{pmatrix} A\dot{\alpha} + D\omega\sin\theta \\ A\dot{\beta} - D\omega\cos\theta \\ C\omega \end{pmatrix}_{B_2}$$

Q - 28) Déterminer, dans le cadre des hypothèses formulées, l'expression au premier ordre du moment dynamique en G du rotor par rapport au bâti 0 : $\vec{\delta}_{G,3/0}$, dans la base B_2.

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué au rotor 3, réduit en G, conduit alors à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = -mr_0\omega^2\sin\theta \\ m\ddot{y} + 2c\dot{y} + 2ky = mr_0\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} + 2cL\dot{\alpha} + 2kL\alpha = -D\omega^2\cos\theta \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} + 2cL\dot{\beta} + 2kL\beta = -D\omega^2\sin\theta \\ C_m = 0 \end{cases}$$

Q - 29) Montrer que certaines équations du mouvement sont découplées et préciser quels paramètres font au contraire l'objet d'un couplage.

Conclusion : ce modèle va nous permettre de simuler des courbes de réponse du système pour vérifier les critères du cahier des charges.

IV.C - Étude du comportement translation

Objectif : valider les performances de la pompe dans le mouvement de translation

Q - 30) On s'intéresse à l'équation en x. En considérant que le système a pour sollicitation d'entrée $r_x(t) = r_0\sin\omega t$, une sinusoïde d'amplitude r_0, et pour sortie le déplacement $x(t)$, montrer que l'équation en x s'écrit

$$m\ddot{x}(t) + 2c\dot{x}(t) + 2kx(t) = m\ddot{r}_x(t)$$

Déterminer la fonction de transfert harmonique :

$$H_x(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{R_x(j\omega)} \qquad \text{où } R_x(p) = \mathscr{L}(r_x(t)).$$

Exprimer $H_x(j\omega)$ sous forme canonique et préciser les expressions littérales et les valeurs numériques de la pulsation propre ω_{x0} et de l'amortissement ε_x.

Q - 31) Montrer que cette fonction de transfert harmonique est stable et tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique et réel, en gain et en phase en précisant les points caractéristiques.

On admet que le maximum de la fonction de transfert harmonique vaut $\|H_x(j\omega_{x0})\|$.

Q - 32) Conclure quant au respect du cahier des charges vis-à-vis du critère de déplacement.

Conclusion : pour être plus précis, il est nécessaire de prendre en compte le mouvement de rotation qui se superpose au mouvement de translation.

IV.D - Simulation des performances du système complet.

Objectif : utiliser le modèle complet pour déterminer les performances du système et justifier la nécessité d'ajouter un dispositif de contrôle anti-vibratoire.

Le comportement du palier en A est une combinaison linéaire du mouvement de translation et du mouvement de rotation. On admettra pour la suite que le système est stable vis-à-vis du mouvement de rotation. Compte tenu de l'excentration r_0, la figure 17 (document réponse) donne l'évolution de $\alpha_0(\omega)$ et $\beta_0(\omega)$ (même courbe) en fonction de la pulsation ω. La figure 18 (document réponse) donne l'évolution de l'amplitude du déplacement au point A : X_{A0} en fonction de ω.

Q - 33) Justifier l'allure de la courbe obtenue figure 18 à partir de la figure 17 et des questions précédentes. Le cahier des charges est-il respecté en terme de déplacement ?

La figure 19 (document réponse) donne l'évolution de l'amplitude de l'effort F_{A0} exercé par le palier en A sur le rotor en fonction de ω.

Q - 34) Le cahier des charges est-il satisfait en terme d'effort ?

Conclusion : les résultats précédents justifient le recours à un système anti-vibratoire.

IV.E - Mise en oeuvre d'un système anti-vibratoire ABS.

Objectif : valider le modèle obtenu en le comparant aux relevés expérimentaux et vérifier la satisfaction du cahier des charges grâce au système ABS.

La société S2M a développé un algorithme permettant de supprimer l'influence du balourd au-delà des pulsations critiques : l'ABS (Active Balancing System).

Cette méthode consiste à ajouter à l'asservissement un filtre trou, ou réjecteur, centré sur la pulsation de rotation du rotor. Le palier possède alors une rigidité très faible pour les fréquences proches de la fréquence de rotation du rotor, mais retrouve sa raideur initiale pour les autres fréquences. L'enclenchement de l'ABS a lieu à partir d'une fréquence de rotation de l'ordre de $150\ \text{Hz}$, après la première pulsation critique, dans la mesure où ce procédé d'élimination des vibrations peut rendre le système instable lorsque la vitesse de rotation est inférieure à ce seuil. Sur la figure 20 (document réponse), la pompe est mise en rotation avec une accélération angulaire constante de $20\ \text{rad/s}^2$. Les courbes représentent alors les évolutions temporelles :

- de l'amplitude du déplacement au point A suivant $\vec{x}_0$,
- de l'amplitude de l'effort au point A.

Q - 35) Valider grâce à ces courbes le modèle mis en place et simulé sur les figures 18 et 19.

Q - 36) Préciser l'instant à partir duquel le dispositif ABS est enclenché et, à l'aide des deux courbes expérimentales figure 20, vérifier si le palier magnétique radial muni du dispositif ABS permet de satisfaire l'ensemble des critères du $CdCF$.

Q - 37) Proposer une conclusion à l'ensemble de l'étude menée à travers le sujet.

Partie V - Équations liant la mesure des capteurs aux déplacements des paliers

Objectif : amélioration du modèle pour tenir compte de la position des capteurs inductifs.

Afin d'asservir la position du rotor dans les paliers magnétiques, des capteurs inductifs (figures 21 et 22 du document réponse et figure 7) mesurent la position. Dans les parties précédentes, ces capteurs étaient supposés placés au niveau des paliers. Ils sont en réalité placés aux points D et E et le calculateur doit calculer, à partir des mesures y_D et y_E, les positions y_A et y_B au niveau de chaque palier magnétique.

Q - 38) Citer deux autres moyens de mesure d'une position en translation. Quels critères de performance conduisent à s'orienter vers le capteur inductif plutôt que vers les autres moyens proposés ?

Q - 39) Calculer les positions y_A et y_B de l'arbre en A et B en fonction des mesures de position y_D et y_E faites par les capteurs inductifs. Pour cette question, préciser clairement votre modèle, le raisonnement suivi, ainsi que les hypothèses effectuées.

••• FIN •••

Annexe du sujet de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cette annexe doit être rendue avec les autres copies.
Il ne pourra pas être délivré d'autres exemplaires de ce document.

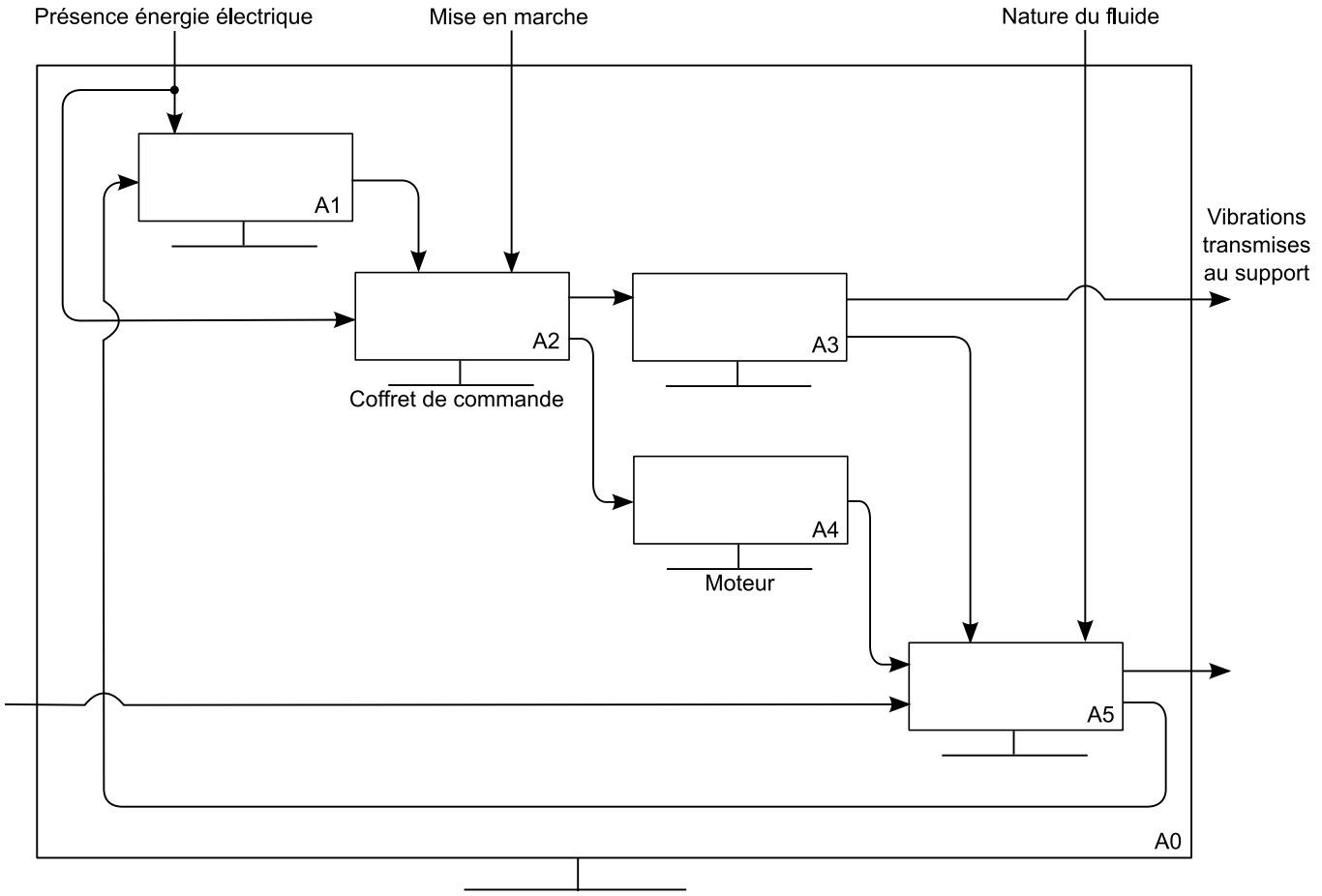


Figure 8 - SADT $A0$ de la pompe turbo-moléculaire

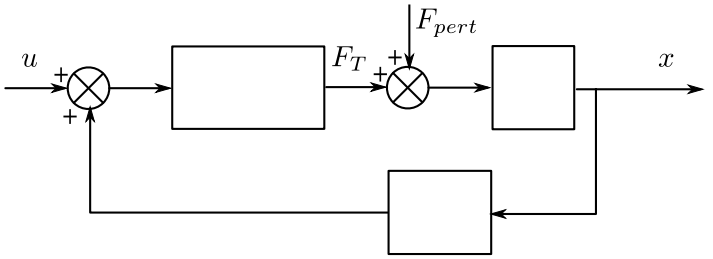


Figure 13 - Schéma bloc à compléter

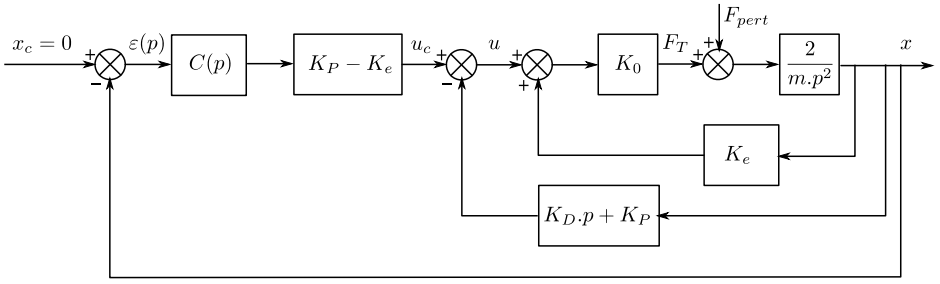


Figure 14 - Asservissement en position du palier magnétique

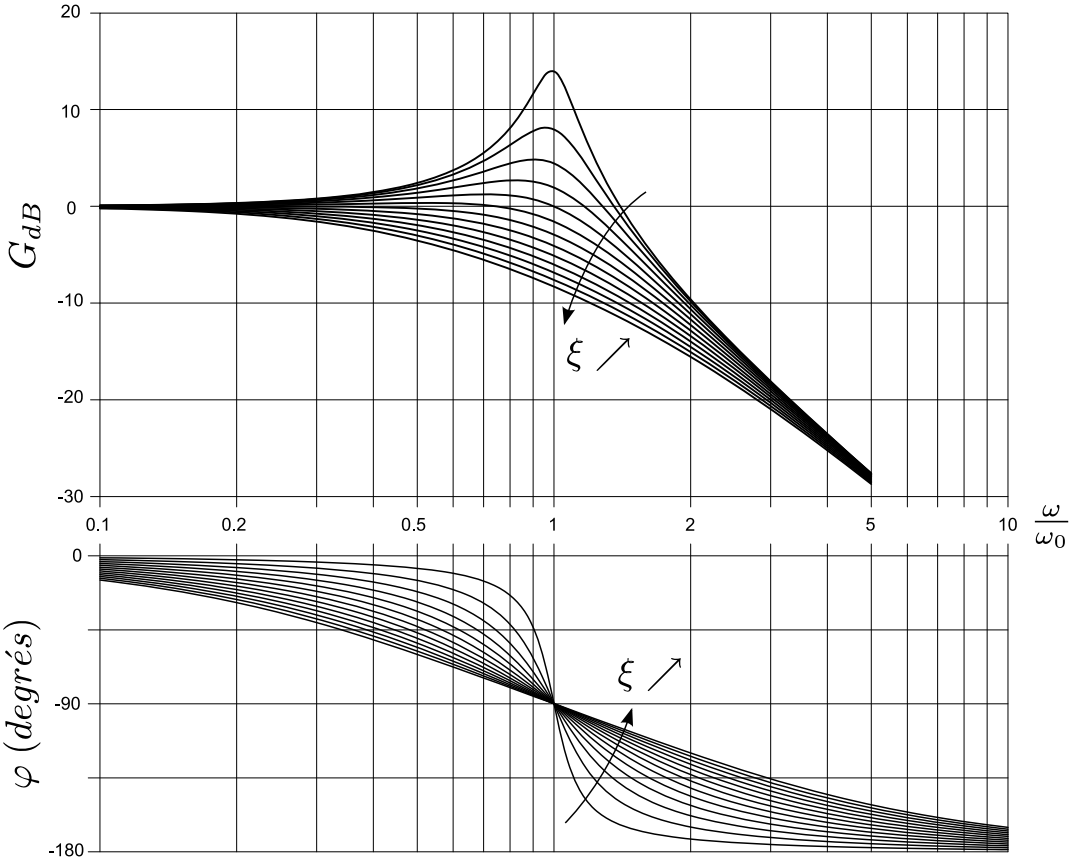


Figure 15 - Diagramme de Bode de $\dfrac{1}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ **avec** ξ **variant de** $0,1$ **à** $1,3$ **par pas de** $0,1$

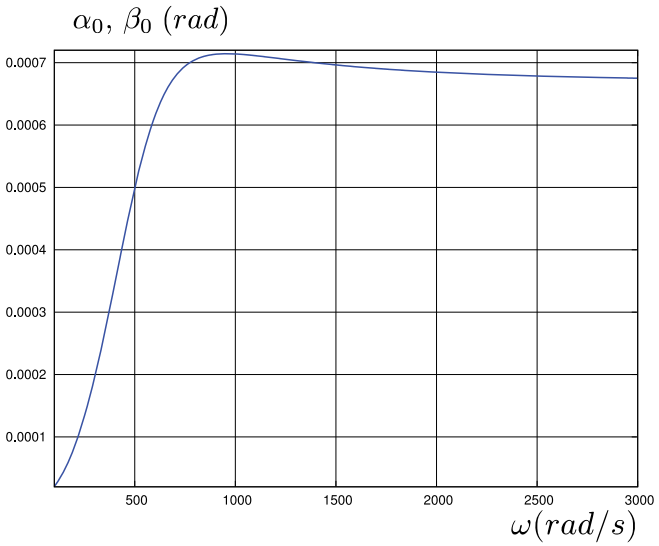


Figure 17 - Amplitude de la rotation

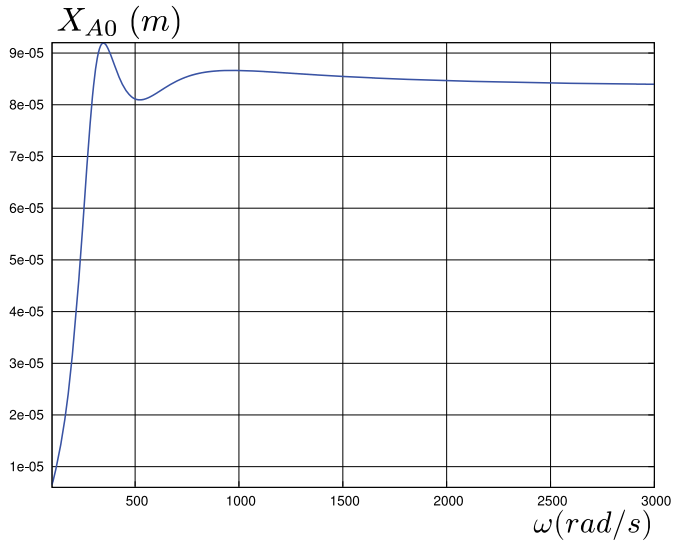


Figure 18 - Amplitude du déplacement

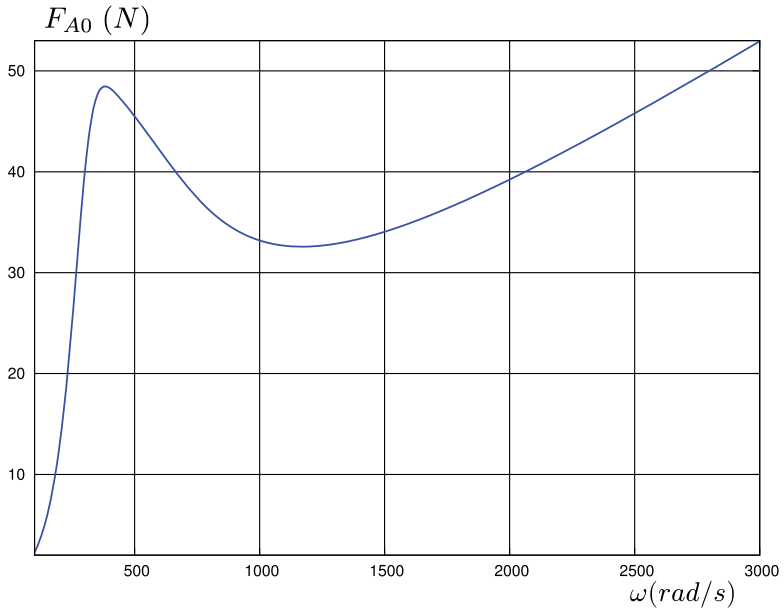


Figure 19 - Amplitude de l'effort

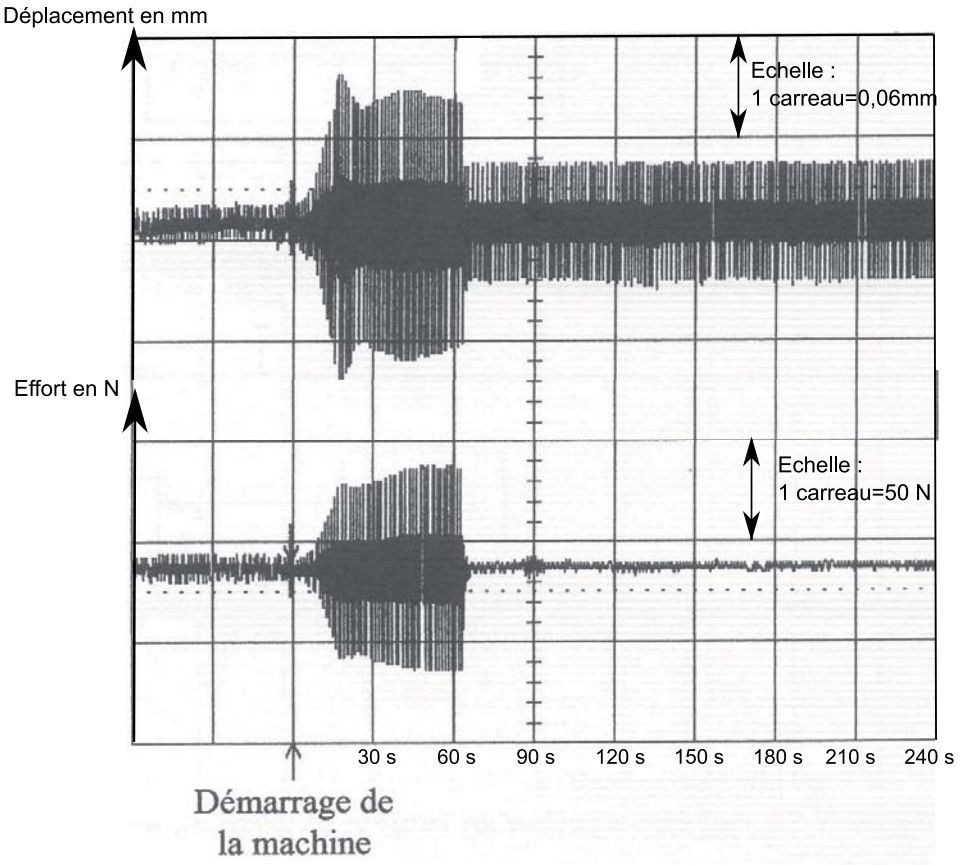


Figure 20 - Courbe de déplacement et d'effort lors de la mise en rotation de la pompe

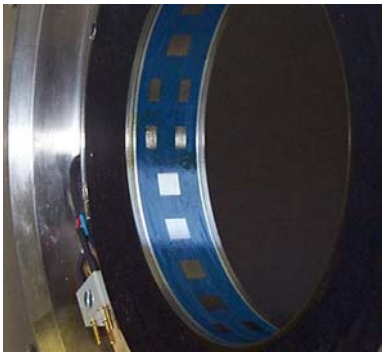


Figure 21 - Photographie du capteur inductif

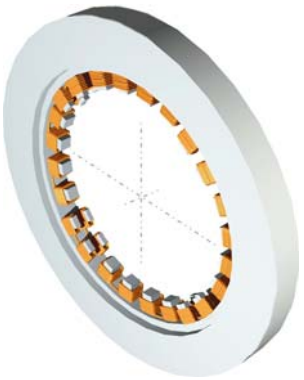


Figure 22 - Vue du capteur à partir d'un modeleur 3D

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- : linéarisation, non-linéarités, pôles dominants, validité
- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode

Ouvrir l'essai gratuit
Scanne le code ou clique sur le bouton.
prepahelp.com/#essai
Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi