Concours Centrale-Supélec, France

Session 2010, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : introduction
- Partie II.A : analyse et modélisation mécaniques de l'actionneur
- Partie II.B : synthèse de la loi de commande de l'actionneur
- Partie III : loi de commande pour l'exosquelette à deux axes

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2010/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

S2I

PSI

2010

4 heures Calculatrices autorisées

La robotique au service du handicap

I Introduction

Les avancées technologiques récentes des actionneurs électriques ont permis le développement du champ d'application de la robotique dans le traitement du handicap et dans la rééducation de la motricité chez l'homme.

Le support de cette étude est une orthèse portable (figure 1), de type exosquelette, qui contribue, entre autres applications, au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras. Installée dans le dos de l'individu, et liée à la fois au bras et à la main, elle offre une résistance aux mouvements de la main. Ainsi, le thérapeute peut réaliser des protocoles très fins de rééducation en programmant des spectres d'efforts résistants pour chaque mouvement du patient. Le travail du patient peut également être optimisé en le plaçant dans un environnement de réalité virtuelle permettant de visualiser les situations de travail conçues par le thérapeute.

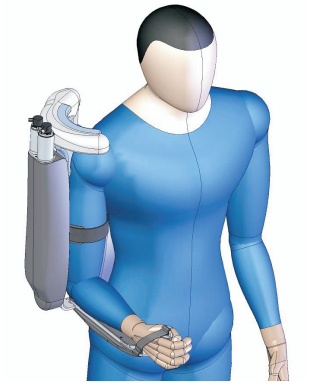
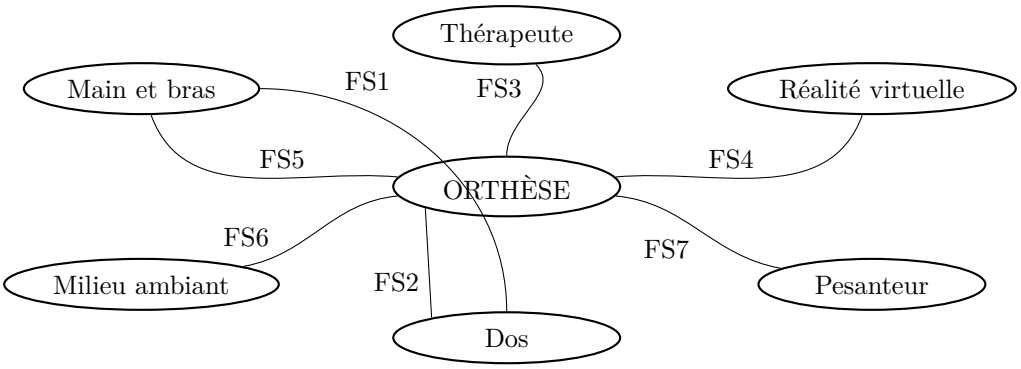


Figure 1 Orthèse d'épaule

Pendant une phase de rééducation de la motricité de l'épaule et du bras, l'environnement peut être partiellement modélisé par le cahier des charges donné sur la figure 2.



N°	Expression	Critère	Niveau
FS1	Permettre au dos de retenir la main	Module du glisseur caractérisant l'effort de manipulation	50 N maxi
		Raideur du maintien	$500\ \mathrm{N \cdot rad^{-1}}$
FS2	Être installée sur le dos	Mouvement relatif	Aucun
FS3	Être programmée par le thérapeute	Programmation	Oui
FS4	S'adapter à la réalité virtuelle		Aucun
FS5	Être liée à la main et au bras	Mouvement relatif	Aucun
FS6	Être adaptée au milieu ambiant	Norme médicale	Oui
FS7	Résister à la pesanteur	Compensation	Totale

Figure 2 Cahier des charges partiel

Le type d'orthèse retenu pour cette étude est un système polyarticulé à quatre axes de rotation entraînés par des moteurs à courant continu, dont un modèle numérique est représenté sur la figure 3. Dans toute la suite, les termes « bras » et « avant-bras » désigneront des parties de l'orthèse, sauf quand on mentionne explicitement le bras ou l'avant-bras du patient.

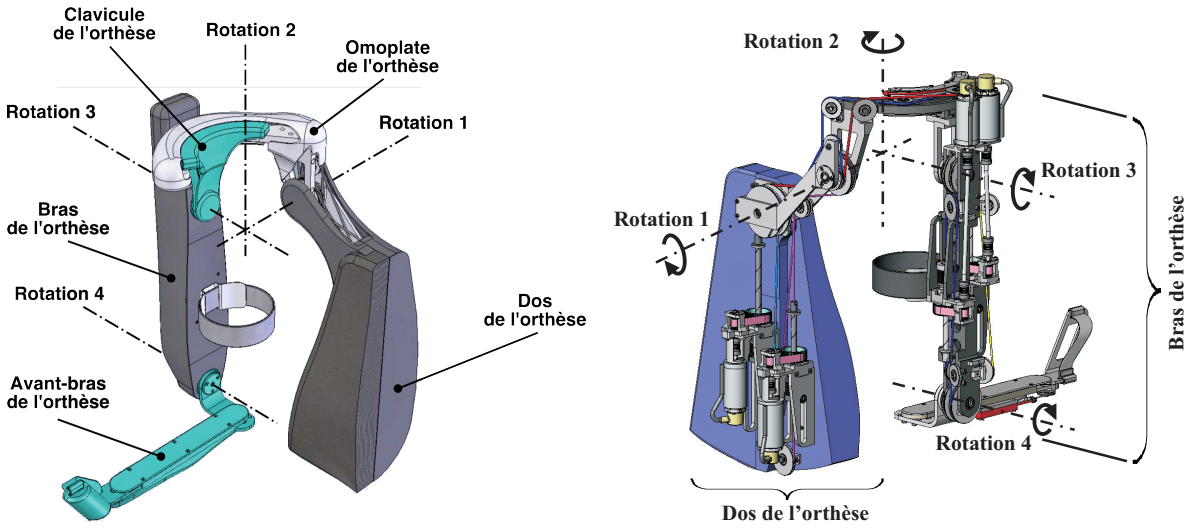


Figure 3 Représentation 3D de l'exosquelette

On remarquera en particulier que le cahier des charges impose que le patient ne doit pas ressentir les effets de la pesanteur associée aux différents éléments articulés de l'orthèse : ainsi, au repos, la chaîne de motorisation et de commande doit compenser les efforts de pesanteur sur le bras et l'avant-bras de l'orthèse (compensation statique).

Q 1. À partir du modèle de la figure 3, établir un schéma cinématique minimal de l'orthèse (hors motorisation) en repérant les cinq ensembles suivants : dos, omoplate, clavicule, bras et avant-bras.

Q 2. Réaliser le graphe des liaisons de l'orthèse et du patient.

Q 3. Déterminer, sans calcul, la liaison cinématiquement équivalente à l'ensemble des liaisons entre le dos de l'orthèse et le bras de l'orthèse. En déduire, sans calcul, les mouvements du bras du patient par rapport à son dos que permet de réaliser cette orthèse.

L'objet de ce sujet est de valider la capacité de l'orthèse à satisfaire les performances attendues et caractérisées dans le cahier des charges partiel de la figure 2.

La solution permettant de satisfaire le cahier des charges nécessite la définition et la mise en place d'une loi de commande des différents axes. Cette loi de commande repose sur le calcul des couples à imposer aux axes des articulations en prenant comme entrées les angles des articulations. La définition de cette loi de commande fait l'objet de la partie III. Pour délivrer le couple nécessaire aux différentes articulations, il est nécessaire de disposer d'un ensemble {actionneur + transmission} capable de fournir à l'articulation un couple égal au couple de référence déterminé par la loi de commande de l'exosquelette. La conception et la validation d'une solution permettant d'assurer cette fonction est l'objectif de la partie II.

II Étude de l'actionneur

Objectif

L'objet de cette partie est la conception d'un actionneur permettant de délivrer un couple sur chaque articulation égal à un couple de référence et de vérifier les capacités de l'actionneur à assurer le cahier des charges. Pour atteindre cet objectif, une première étude portera sur l'analyse et la modélisation mécaniques de l'actionneur ; une deuxième étude abordera l'asservissement de la chaîne de motorisation.

La conception de l'actionneur repose sur une machine à courant continu asservie en courant, dont le cahier des charges est décrit dans le tableau de la figure 4.

Temps de réponse à 5 % pour un échelon de consigne de couple	$t \leq 2$ ms
Erreur statique pour un couple de référence constant C_{ref0}	$\lvert\varepsilon_0\rvert \leq 0{,}05\ C_{\text{ref0}}$
Couple maximal fourni sur l'axe de l'articulation	$C_{\max} = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$

Figure 4 Cahier des charges de l'actionneur

II.A – Analyse et modélisation mécaniques

La définition et la conception de la loi de commande de l'actionneur nécessitent d'étudier précisément la dynamique de la transmission depuis le moteur jusqu'à l'axe de l'articulation mise en mouvement. La figure 5 donne une représentation 3D de la transmission utilisée, dont le schéma de principe proposé en figure 6 peut se décomposer en quatre sous-ensembles distincts (certains composants sont définis sur les figures 9 et 10) :

1. l'axe du moteur est relié par l'intermédiaire de deux joints de Cardan et d'une tige cylindrique intermédiaire **I** à l'axe **24** d'une petite roue dentée ;
2. par un système de courroie crantée **25**, la petite roue dentée entraîne une grande roue dentée fixée sur l'axe **16** du dispositif hélicoïdal ;
3. le dispositif hélicoïdal, défini sur la figure 9 et faisant l'objet d'une étude ultérieure, assure la transformation du mouvement de rotation de l'axe **16** en un mouvement de translation du câble **4** ;
4. le câble **4** par l'intermédiaire de plusieurs poulies entraîne en rotation l'axe que l'on souhaite commander.

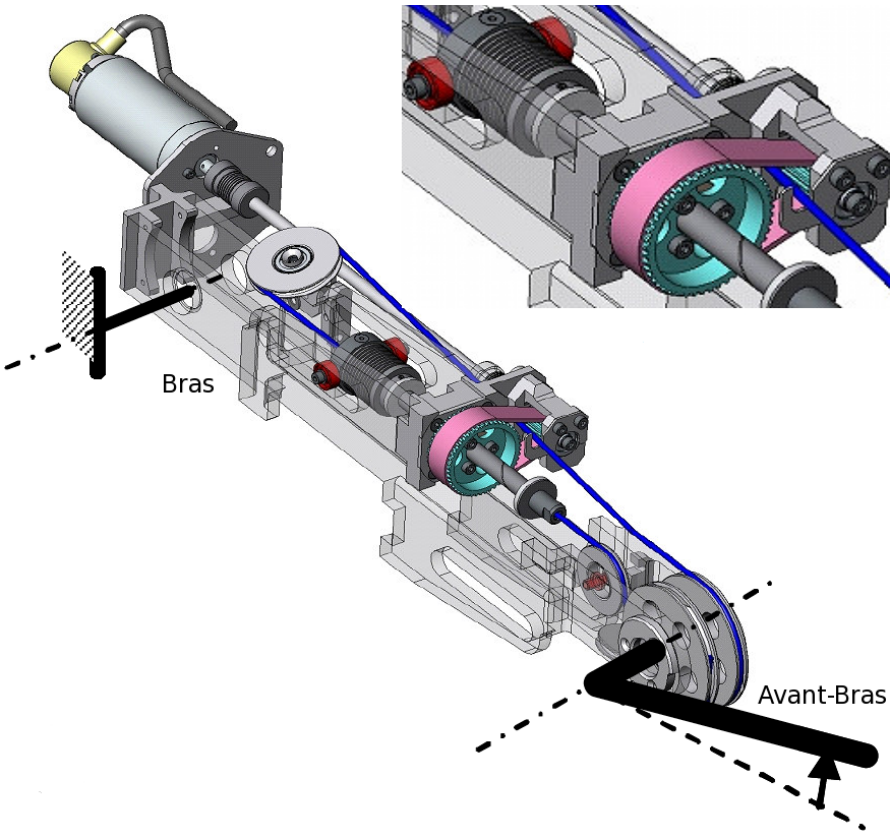


Figure 5 Représentation 3D de la transmission utilisée

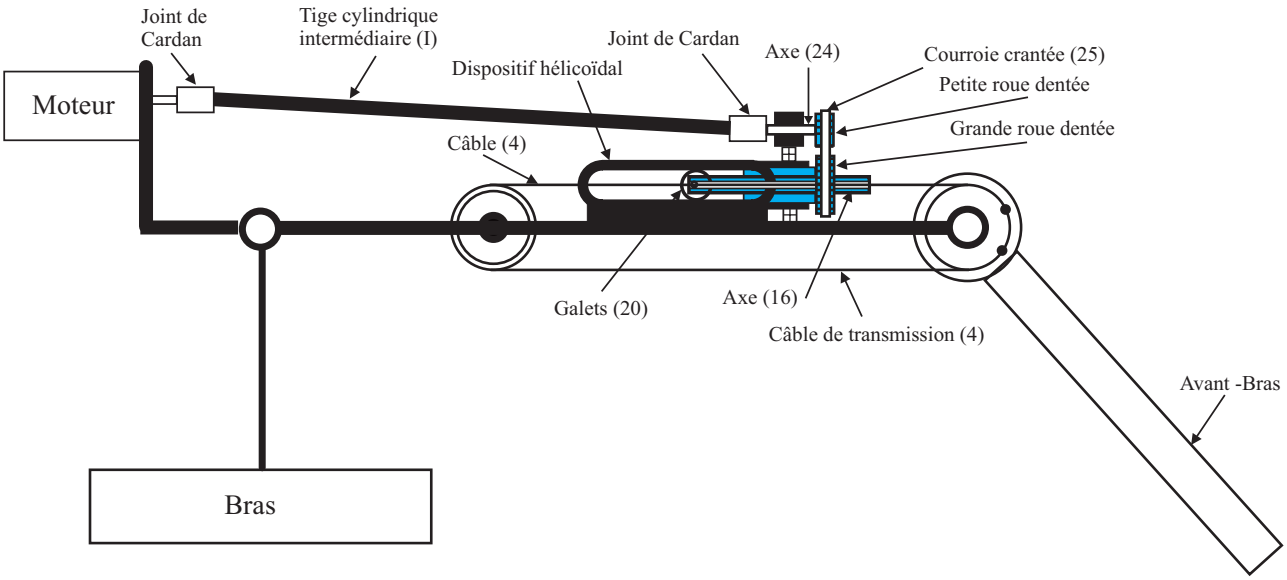


Figure 6 Schéma de principe de la transmission

II.A.1) Étude du premier sous-ensemble de la transmission

On s'intéresse tout d'abord à la transmission du mouvement de rotation entre l'axe du moteur et l'axe **24** de la petite roue dentée par l'intermédiaire des deux joints de Cardan. Il est donc nécessaire de déterminer la relation cinématique d'entrée-sortie dans un seul joint de Cardan dont le schéma cinématique est donné sur la figure 7 avec le paramétrage suivant imposé :

- l'arbre d'entrée **E** est en liaison pivot d'axe $(O_E, \vec{y}_E)$ avec le bâti fixe associé au repère $(O_E, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec $\theta_E = (\vec{x}, \vec{x}_E) = (\vec{z}, \vec{z}_E)$;
- l'arbre de sortie **S** est en liaison pivot d'axe $(O_S, \vec{y}_S)$ avec le bâti fixe associé au repère $(O_S, \vec{x}^*, \vec{y}^*, \vec{z})$, avec $\theta_S = (\vec{x}^*, \vec{x}_S) = (\vec{z}^*, \vec{z}_S)$;
- on note φ l'angle constant que forment les axes des deux arbres qui sont reliés par le joint de Cardan, avec $\varphi = (\vec{x}, \vec{x}^*) = (\vec{y}, \vec{y}^*)$.

Le joint de Cardan se compose :

- d'une fourchette **FE**, liée à l'arbre d'entrée **E** d'axe $(O_E, \vec{y}_E)$, disposant de deux alésages d'axe commun $(I, \vec{z}_E)$;
- d'une fourchette **FS**, liée à l'arbre de sortie **S** d'axe $(O_S, \vec{y}_S)$, disposant de deux alésages d'axe commun $(I, \vec{x}_S)$;
- d'un croisillon **C**, en liaisons pivots d'axes $(I, \vec{z}_E)$ et $(I, \vec{x}_S)$ respectivement avec les fourchettes **FE** et **FS**.

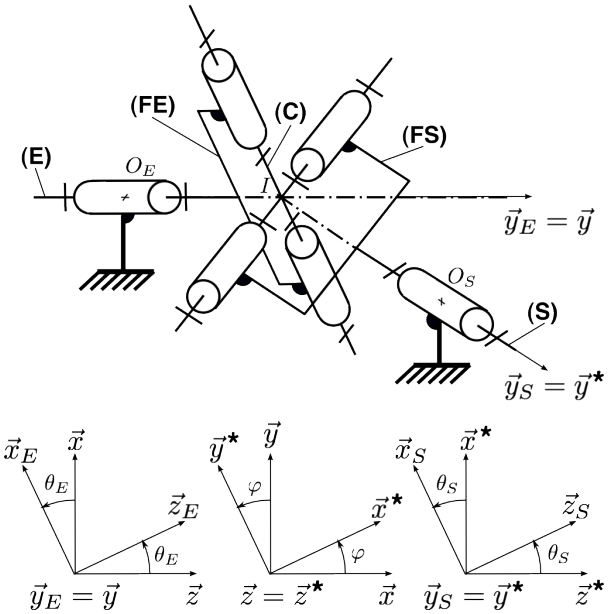


Figure 7 Schéma cinématique d'un joint de Cardan et paramétrage associé

Q 4. Par construction, les deux axes du croisillon sont orthogonaux. Écrire, en utilisant cette propriété, une équation liant les deux paramètres angulaires θ_E, θ_S et l'angle constant φ. En déduire la relation exprimant la vitesse angulaire de sortie $\omega_S = \dot{\theta}_S$ en fonction de la vitesse angulaire d'entrée $\omega_E = \dot{\theta}_E$, de l'angle φ et de la tangente de l'angle θ_E. Tracer l'allure de ω_S en fonction du temps, dans le cas où ω_E est constante ; on précisera les valeurs minimale et maximale de ω_S au cours du temps en fonction de φ et ω_E.

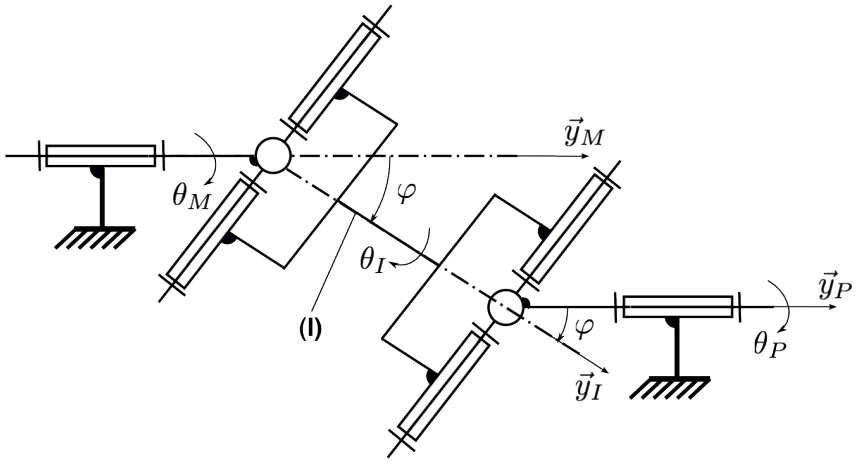


Figure 8 Disposition des deux joints de Cardan dans la transmission étudiée

Dans la transmission étudiée, les deux joints de Cardan sont reliés par une tige cylindrique intermédiaire **I** selon la géométrie de la figure 8. Les axes du moteur et de la petite roue dentée sont parallèles, de sorte que l'axe de la tige cylindrique **I** soit contenu dans le plan caractérisé par les deux axes précédents, et forme un angle φ avec chacun de ces axes.

Q 5. À l'aide des résultats de la question 4, exprimer le rapport des vitesses angulaires :

- ω_I/ω_M, où $\omega_I = \dot{\theta}_I$ et $\omega_M = \dot{\theta}_M$ sont respectivement les vitesses angulaires de la tige intermédiaire **I** et du moteur ;
- ω_I/ω_P, où $\omega_P = \dot{\theta}_P$ est la vitesse angulaire de la petite roue dentée liée à l'axe **24**.

En déduire la relation entre ω_M et ω_P. Conclure sur l'intérêt d'employer deux joints de Cardan dans cette configuration spécifique plutôt qu'un seul, et caractériser par **un seul mot** la propriété ainsi réalisée par les deux joints de Cardan.

II.A.2) Étude du troisième sous-ensemble de la transmission

Objectif

L'objet de cette partie est de valider le dispositif hélicoïdal qui est le cœur du mécanisme de transformation du mouvement de rotation de la grande roue dentée **16** en mouvement de translation du câble **4** de transmission.

Le détail des éléments constitutifs de ce sous-système est donné sur la figure 9 :

- le dispositif hélicoïdal proprement dit se compose d'un réceptacle cylindrique **17** solidaire de l'axe **16** sur lequel est fixée la noix d'écrou **18** en guidage hélicoïdal du type vis-écrou avec la vis **1** ;
- l'ensemble solidaire {axe **16** – réceptacle **17** – noix **18**} est guidé en rotation par rapport au bâti **14** par l'intermédiaire de deux roulements à billes **23** ;
- à l'une des extrémités de la vis **1** est fixé un dispositif anti-rotation composé d'un axe cylindrique **19** sur lequel sont montés en pivot, d'axe perpendiculaire à l'axe de la vis, deux galets bombés **20** roulant dans deux rainures longitudinales **21** d'un tube **22** solidaire du bâti **14** ;
- la vis **1** est tubulaire comme le montre la figure 10 : au centre de la cavité cylindrique **2** est placé un dispositif **3** d'accroche d'un câble **4**, ce dispositif étant maintenu en position médiane dans la cavité **2** par l'utilisation de deux entretoises cylindriques tubulaires **5** (non hachurées) associées à deux bouchons **6** vissés sur la vis **1**.

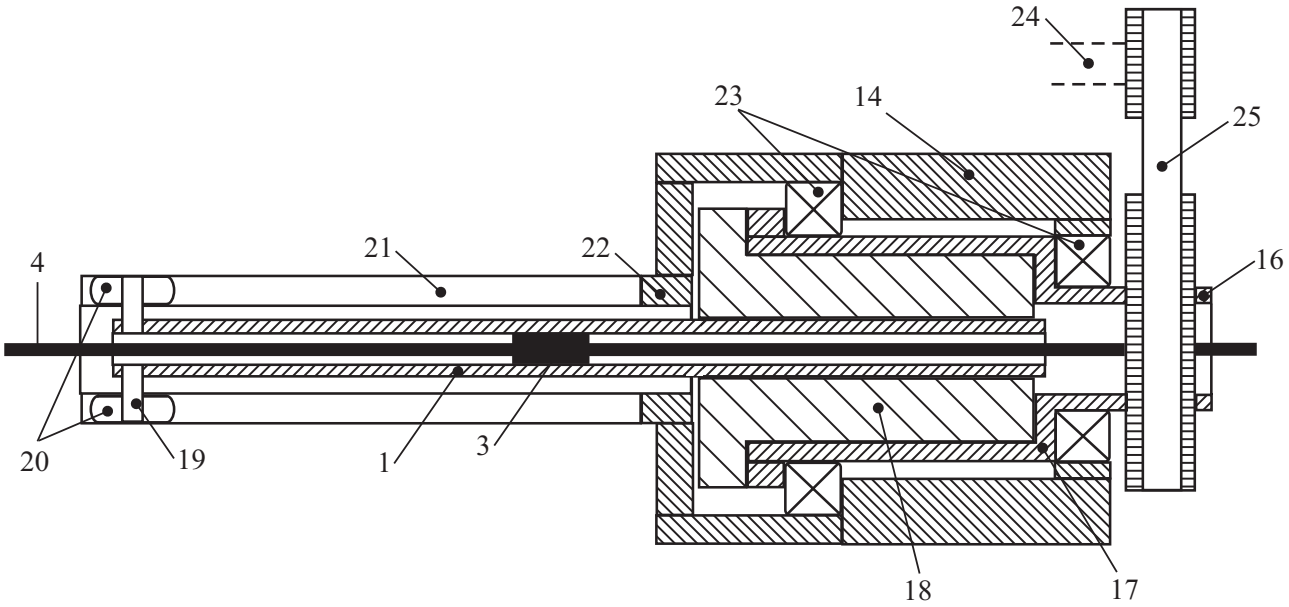


Figure 9 Détail du dispositif hélicoïdal

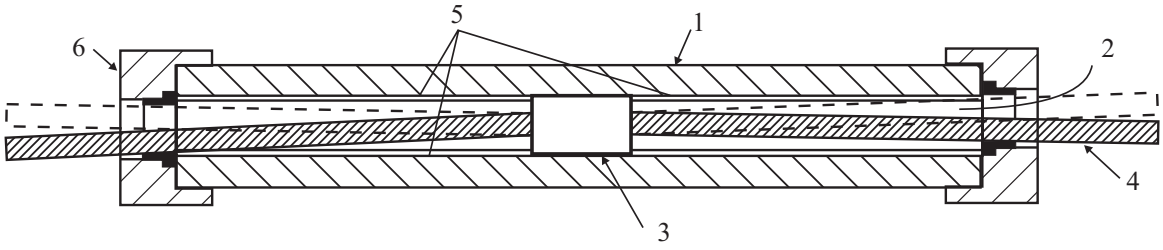


Figure 10 Détail de la vis tubulaire (le dispositif anti-rotation n'est pas représenté)

Q 6. Compléter le diagramme FAST proposé sur la figure R1 du document réponse en précisant les composants assurant les fonctions techniques mentionnées.

Sur la figure R2.a du document réponse est proposé un schéma cinématique du système étudié.

Q 7. Proposer une liaison cinématiquement équivalente Léq(**1/14**) aux liaisons encadrées en pointillés dans la figure R2.a, que l'on dessinera dans le cadre en pointillés de la figure R2.b du document réponse. Justifier le terme d'« anti-rotation » donné au dispositif.

Q 8. Calculer le degré d'hyperstatisme du mécanisme décrit par le schéma cinématique complété de la figure R2.b. Justifier ce degré d'hyperstatisme en recensant les contraintes géométriques présentes dans le mécanisme. Quel composant, visible sur la figure 5, peut-on intercaler entre la vis **1** et l'axe cylindrique **19**, qui sont en liaison encastrement dans la solution décrite ici, pour supprimer ces contraintes ?

Q 9. Exprimer le rapport entre les normes du vecteur vitesse de rotation de la noix d'écrou **18/14** et du vecteur vitesse de translation de la vis **1/14** en fonction d'un paramètre géométrique de la vis.

II.A.3) Modèle dynamique de la transmission complète

Objectif

En vue de déterminer une loi de commande pour l'actionneur, l'objectif de cette partie est de déterminer un modèle dynamique de la chaîne de transmission complète. Le cas considéré est celui de la commande d'un avant-bras par un actionneur placé sur le bras, supposé fixe.

Les caractéristiques des différents éléments constitutifs de la transmission complète sont données ci-après :

- moteur : vitesse angulaire ω_M, moment d'inertie autour de l'axe moteur $I_M = 2{,}5 \times 10^{-5}$ kg · m^2, couple moteur C_M ;
- tige intermédiaire **I** : vitesse angulaire ω_I, masse et inertie négligeables ;
- petite roue dentée **24** : vitesse angulaire ω_P, masse et inertie négligeables ;
- courroie crantée **25** : masse et inertie négligeables ;
- {grande roue dentée **16** + noix d'écrou **18**} : vitesse angulaire $\omega_G = \omega_P/N_r$ avec $N_r = 3$, masse et inertie négligeables ;
- {vis tubulaire **1** + dispositif anti-rotation **19**+**20**} : pas réduit $p = 0{,}5$ mm · rad^{-1}, masse et inertie négligeables ;
- {câble **4** + poulies associées à l'articulation} : rayon des poulies $R = 25$ mm, masse et inertie négligeables ;
- {axe de l'articulation + avant-bras} : vitesse angulaire ω_b, moment d'inertie autour de l'axe de l'articulation $I_b = 4 \times 10^{-2}$ kg · m^2.

Q 10. On note N le rapport de réduction de la transmission, défini tel que $\omega_b = \omega_M/N$. Compte tenu des données précédentes et des résultats des questions 5 et 9, calculer N.

En réalité, le câble des poulies de l'articulation n'est pas inextensible et a une certaine élasticité, ce qui se traduit par le fait que $\omega_b \neq \omega_M/N$, et de plus, des phénomènes de frottement sont présents. Dans ce cas, on peut écrire que l'axe de l'articulation est soumis aux deux couples suivants, qui sont exprimés sur l'axe de l'articulation :

- un couple élastique $C_e = -K_r(\theta_b - (\theta_M/N))$, où θ_b est la position angulaire de l'axe de l'articulation, tel que $\dot{\theta}_b = \omega_b$;
- un couple de frottement visqueux exercé par le palier qui guide l'axe tel que $C_f = -f\omega_b$.

Enfin, le couple résistant total exercé sur le moteur et exprimé sur son axe est noté $-C_r$.

On donne la raideur en torsion du système {câble + poulie} : $K_r = 8000$ N · m · rad^{-1}, et le coefficient de frottement visqueux sur l'axe : $f = 4$ N · m · s · rad^{-1}. On suppose de plus que **la tension est constante en tout point du câble**.

Q 11. À partir des hypothèses précédentes, écrire littéralement :

- la projection sur l'axe de l'articulation du théorème du moment dynamique appliqué à l'ensemble {axe de l'articulation + avant-bras} ;
- la projection sur l'axe du moteur du théorème du moment dynamique appliqué à l'axe moteur de l'actionneur.

II.B – Synthèse de la loi de commande et validation de la boucle d'asservissement

Objectif

En pratique, le couple délivré par le moteur ne peut être mesuré directement, c'est pourquoi la grandeur asservie est le courant moteur. L'objet, dans cette phase de l'étude, est alors de déterminer une loi de commande pour la boucle d'asservissement et de valider les performances vis-à-vis du cahier des charges partiel.

Les moteurs utilisés sont des machines à courant continu et aimants permanents dont les équations de comportement sont :

$$v(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + K_e \omega_M(t)$$
$$C_M(t) = K_c i(t)$$

- $v(t)$ et $i(t)$ sont respectivement la tension aux bornes de l'induit et le courant d'induit ;
- $u(t)$ est la tension de commande de l'amplificateur de puissance de gain $A = 4$;
- $R_m = 1{,}12\ \Omega$, $L_m = 1$ mH et $K_e = K_c = 0{,}057\ \text{V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$ sont les caractéristiques du moteur, respectivement : résistance d'induit, inductance d'induit, constante de force électromotrice et constante de couple ;
- le couple nominal du moteur est $C_{\text{nominal}} = 0{,}35\ \text{N} \cdot \text{m}$;
- le courant moteur est mesuré au moyen d'un capteur de gain statique $\rho = 1\ \text{V} \cdot \text{A}^{-1}$ et caractérisé par une fonction de transfert du premier ordre. La mesure de courant est notée $i_{\text{mes}}(t)$ dans la suite et est telle que : $I_{\text{mes}}(p)/I(p) = 1/(1 + \tau\rho)$.

Par ailleurs, l'arbre moteur est soumis à un couple résistant supplémentaire C_{ext}, dû aux perturbations, tel que le couple résistant total auquel est soumis le moteur est de la forme $C_r(t) = C_{\text{ext}} + C'_e(t)$ où $C'_e(t)$ est le couple élastique $C_e(t)$ ramené sur l'axe du moteur. Enfin, le couple de frottement visqueux s'exerçant sur l'arbre moteur est négligé.

La figure R3 du document réponse représente le schéma bloc de la chaîne d'asservissement en courant de l'actionneur, où $C(p)$ est le correcteur de la boucle et $C_{\text{ext}}(p)$ le couple extérieur perturbateur.

Q 12. Au regard des objectifs souhaités, c'est-à-dire de fournir un couple égal à un couple de référence, justifier le choix de la grandeur asservie.

Q 13. Exprimer le couple élastique ramené sur l'axe du moteur et préciser la norme du couple résistant total auquel est soumis le moteur. On supposera que le rendement de la transmission est égal à 1.

Q 14. À partir des équations déterminées à la question 11, compléter le schéma bloc du document réponse figure R3 par les fonctions de transfert appropriées, exprimées avec une notation littérale.

Q 15. Citez deux principes permettant de mesurer le courant dans le moteur.

Le correcteur choisi est de type proportionnel-intégral (P.I.) de fonction de transfert :

$$C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$$

où l'on adopte sans aucune justification $T_i = 0{,}3$ ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée :

$$H(p) = \frac{I_{\text{mes}}(p)}{U(p)} = \frac{0{,}0326p\left(1 + \dfrac{2 \times 0{,}08}{463}p + \dfrac{1}{(463)^2}p^2\right)}{\left(1 + \dfrac{p}{122}\right)\left(1 + \dfrac{2 \times 0{,}09}{464}p + \dfrac{1}{(464)^2}p^2\right)\left(1 + \dfrac{p}{10^3}\right)\left(1 + \dfrac{p}{10^4}\right)}$$

est donné sur la figure R4 du document réponse, où $i_{\text{mes}}(t)$ est la mesure du courant du moteur et $u(t)$ la tension d'alimentation. Ce tracé pourra être utilisé sans aucune justification.

II.B.1) Synthèse du régulateur P.I. de la boucle de courant

Q 16. Compléter le diagramme de la figure R4 par le tracé des diagrammes asymptotiques de la fonction $H(p)$.

Q 17. En adoptant $K = 1$, tracer directement sur la figure R4 du document réponse, le diagramme de Bode (module et phase) de $C(p)$: diagrammes asymptotiques et allures des tracés réels avec les valeurs prises aux points caractéristiques.

Q 18. En déduire les tracés asymptotiques et les allures des tracés réels du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée (on utilisera directement la figure R4 en différenciant les tracés par des couleurs différentes). Déterminer, sans calcul supplémentaire, la pulsation ω_1 telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte est égale à $-135°$ et la valeur numérique du gain statique.

Q 19. Déterminer alors la valeur du gain K permettant d'assurer une marge de phase de 45°.

On considère maintenant le système corrigé avec le correcteur $C(p)$ qui vient d'être déterminé.

Q 20. Déterminer un ordre de grandeur de la marge de gain obtenue et conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

Q 21. Déterminer l'écart statique $\Delta i_0 = \lim_{t \to \infty} (i_c(t) - i_{\text{mes}}(t))$ en boucle fermée en réponse à un échelon de consigne $i_c(t) = I_0 \Gamma(t)$ d'amplitude I_0 et l'exprimer sous la forme $\Delta i_0 = k I_0$ en précisant la valeur numérique de k.

La figure 11 représente la structure de l'actionneur (la boucle de courant du moteur étant fermée) : i_c et i sont respectivement la consigne et le courant moteur, C_{ref} est le couple de référence souhaité, C_a est le couple appliqué par l'actionneur sur l'axe de l'articulation et G_{ic} est un gain pur correspondant à la relation entre le courant et le couple C_a. On suppose pour toute cette question que le couple de référence $C_{\text{ref}}(t)$ est constant d'amplitude $C_{\text{ref}} = C_{\text{ref0}}$.

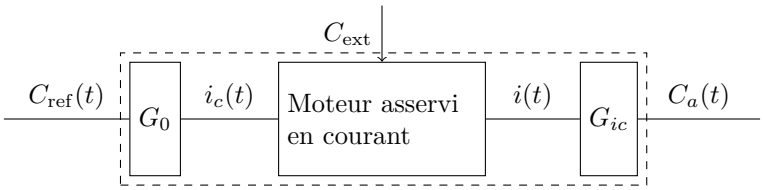


Figure 11 Schéma de l'actionneur

Q 22. Exprimer G_{ic} en fonction de K_c et de N.

Q 23. En supposant qu'en régime permanent l'erreur statique de la boucle d'asservissement de courant est nulle $\Delta i_0 = 0$, donner la valeur du gain G_0 permettant d'assurer l'égalité des couples de référence C_{ref0} et appliqué C_a.

Q 24. En remarquant que le gain statique du capteur de courant est de 1, montrer, en utilisant les résultats de la question 21 et l'expression de G_0 obtenue à la question 23, qu'en régime permanent l'erreur $\Delta C = C_{\text{ref}} - C_a$ entre le couple de référence et le couple moteur exprimé sur l'axe de l'articulation est $\Delta C = k_1 C_{\text{ref0}}$. Déterminer k_1 en fonction de k.

Q 25. Vérifier alors si les différentes exigences[1] du cahier des charges de l'actionneur sont validées.

III Synthèse d'une loi de commande pour l'exosquelette

Objectif

L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande utilisée, par exemple, pour des situations de travail où le patient peut déplacer le bras et doit appliquer une force prédéterminée par le physiothérapeute, dépendante des positions des articulations. Dans le cadre de cette étude, l'effort est élastique et caractérisé par une raideur de torsion. La synthèse de cette loi de commande sera faite en deux étapes : dans un premier temps, la mise en équation de l'exosquelette (limité à deux axes pour des raisons de simplicité) sera effectuée en vue d'obtenir un modèle dynamique ; dans un deuxième temps, la loi de commande sera déterminée en utilisant le modèle dynamique établi au préalable. Il s'agira, de plus, de valider le dimensionnement de la chaîne de motorisation.

Le cahier des charges de la figure 2 est rappelé partiellement par les exigences données dans le tableau de la figure 12. On rappelle que l'actionneur ne peut fournir, en régime permanent, sur l'axe de l'articulation qu'un couple de module inférieur à 50 N · m. On suppose, de plus, qu'en régime transitoire le couple maximal peut atteindre quatre fois la valeur maximale autorisée en régime permanent.

On s'intéresse ici à une situation de travail où les relations entre les variations des positions angulaires du bras et de l'avant bras ${}^t(\gamma\ \delta)$ et la variation de la force Z_F (ces grandeurs seront définies par la suite dans la section III.A) exercée par le patient sont équivalentes à des raideurs de torsion de valeurs (K_1, K_2).

Module de l'effort de manipulation maximal en régime permanent	50 N
Compensation du couple statique (dû à la pesanteur)	Totale
Raideurs (K_1, K_2) de maintien (pour ce critère, seule la force Z_F est considérée)	$\lvert\Delta Z_F/\Delta\gamma\rvert = K_1 \geq 500\ \text{N}\cdot\text{rad}^{-1}(\pm 5\%)$
	$\lvert\Delta Z_F/\Delta\delta\rvert = K_2 \geq 500\ \text{N}\cdot\text{rad}^{-1}(\pm 5\%)$

Figure 12 Compléments au cahier des charges

La structure de commande retenue est représentée par le schéma de la figure 13 où :
- q et $\dot{q}$ sont respectivement les vecteurs des angles et des vitesses angulaires des articulations ;
- une boucle externe génère les trajectoires (positions, vitesses et accélérations) et éventuellement un contexte de travail ;
- une boucle interne (de loi non linéaire) génère les couples souhaités sur chaque axe (articulation) à partir des mesures des angles et des vitesses angulaires des articulations et éventuellement des données issues du générateur de trajectoire ;
- un ensemble d'actionneurs fournit les couples, sur les axes des articulations, identiques aux couples de référence $C_a = C_{\text{ref}}$.

[1] On admettra sans aucune justification que la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse sont liés par la relation approximative $\omega_c T_r \approx 3$.

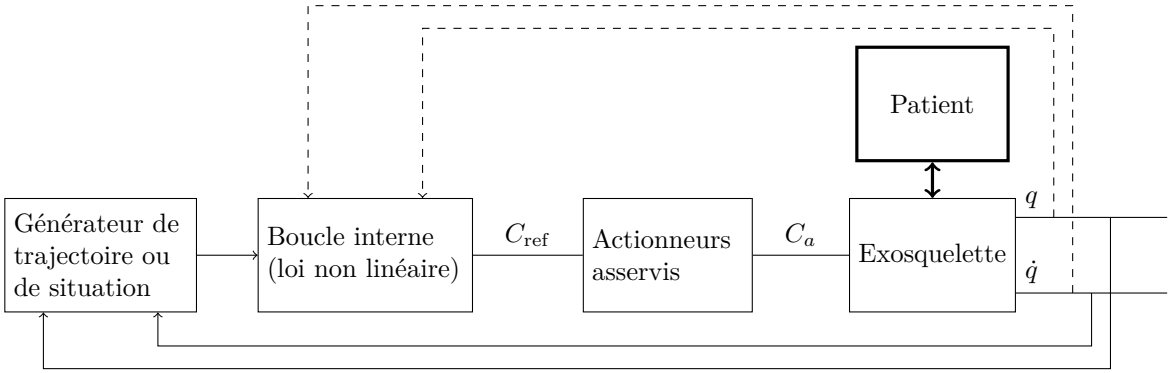


Figure 13 Structure de commande

III.A – Modélisation dynamique «deux axes» de l'exosquelette

Objectif

Le but de cette partie est d'établir un modèle dynamique du bras et de l'avant-bras dans un plan vertical donné. Ces deux ensembles sont soumis aux actions de la pesanteur, des couples des deux moteurs montés dans le bras et de la force extérieure exercée sur l'extrémité de l'avant-bras. Le cadre de l'étude se limite aux mouvements de deux axes (les deux autres axes étant supposés fixes).

Le système étudié se réduit donc à l'ensemble {Bras + Avant-bras} relativement au reste du dispositif supposé fixe : on suppose que les angles d'abduction/adduction et de rotation interne/rotation externe de l'épaule sont maintenus identiquement nuls par l'action des moteurs situés dans la partie dorsale du dispositif (non étudiée ici). Le paramétrage se réduit donc à la situation de la figure 14 qui représente l'ensemble étudié dans un plan $(\vec{x},\vec{z})$ donné, où l'on choisit $\vec{z}$ vertical **dans le sens descendant**. Le tableau de la figure 15 précise les différents paramètres utiles pour le calcul de dynamique envisagé.

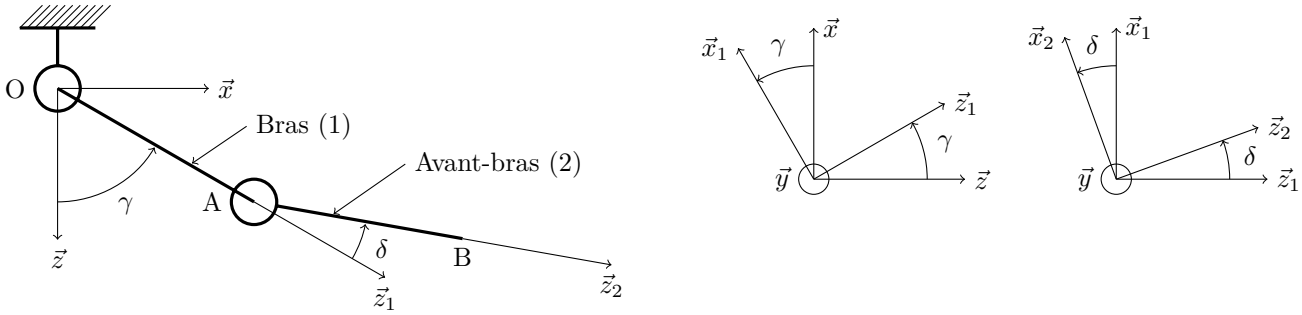


Figure 14 Paramétrage du problème dynamique plan considéré

Bâti		
Repère $R_0 = (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ fixe, galiléen		
Bras (moteurs compris)		
Repère $R_1 = (O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ Angle $\gamma = (\vec{x},\vec{x}_1) = (\vec{z},\vec{z}_1)$ $\vec{y} = \vec{y}_1$	Longueur $l_1 = 350$ mm Masse $m_1 = 2{,}3$ kg Centre d'inertie G_1 tel que : $\overrightarrow{OG_1} = \lambda_1\vec{z}_1,\ \lambda_1 = 50$ mm	Matrice d'inertie $I(G_1,1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1}$ $A_1 = 2{,}4\times10^{-2}$ kg·m^2 $B_1 = 2{,}3\times10^{-2}$ kg·m^2 $D_1 = 2{,}1\times10^{-3}$ kg·m^2
Avant-bras		
Repère $R_2 = (A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ Angle $\delta = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2)$ $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$	Longueur $l_2 = 270$ mm Masse $m_2 = 0{,}3$ kg Centre d'inertie G_2 tel que : $\overrightarrow{AG_2} = \lambda_2\vec{z}_2,\ \lambda_2 = 135$ mm	Matrice d'inertie $I(G_2,2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}_{\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2}$ $A_2 = 1{,}8\times10^{-3}$ kg·m^2 $B_2 = 1{,}8\times10^{-3}$ kg·m^2 $D_2 = 4{,}3\times10^{-5}$ kg·m^2

Figure 15 Notations et paramètres pour la modélisation dynamique

Q 26. Exprimer littéralement, au point G_2 et dans le repère R_1, le torseur dynamique du mouvement du solide {Avant-bras} par rapport au référentiel fixe R_0 supposé galiléen : $\{\mathcal{D}(\text{Avant-bras}/R_0)\}_{G_2,(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$.

Les différentes actions mécaniques agissant sur le dispositif sont les suivantes :

- l'action de la pesanteur sur les solides {Bras} et {Avant-bras} ;
- l'action du bâti sur le solide {Bras} au travers de la liaison pivot d'axe $(O, \vec{y})$ et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :

$$\left\{\tau_{(\text{Bâti}\to\text{Bras})}\right\} = \left\{\begin{array}{l} X_1\vec{x}_1 + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z}_1 \\ L_1\vec{x}_1 + M_1\vec{y} + N_1\vec{z}_1 \end{array}\right\}_O$$

  où les paramètres (X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1) sont inconnus ;
- l'action du premier actionneur sur le solide {Bras} :

$$\left\{\tau_{(\text{Actionneur1}\to\text{Bras})}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_1(t)\vec{y} \end{array}\right\}_O$$

  où le coupe $C_1(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- l'action du solide {Bras} sur le solide {Avant-bras} au travers de la liaison pivot d'axe $(A, \vec{y})$ et de torseur d'action mécanique écrit sous la forme générique suivante :

$$\left\{\tau_{(\text{Bras}\to\text{Avant}-\text{bras})}\right\} = \left\{\begin{array}{l} X_2\vec{x}_1 + Y_2\vec{y} + Z_2\vec{z}_1 \\ L_2\vec{x}_1 + M_2\vec{y} + N_2\vec{z}_1 \end{array}\right\}_A$$

  où les paramètres (X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2) sont inconnus ;
- les actions du second actionneur sur le solide {Bras} et le solide {Avant-bras}, respectivement notées :

$$\left\{\tau_{(\text{Actionneur2}\to\text{Bras})}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_2(t)\vec{y} \end{array}\right\}_A \qquad \text{et} \qquad \left\{\tau_{(\text{Actionneur2}\to\text{Avant}-\text{bras})}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_2(t)\vec{y} \end{array}\right\}_A$$

  où le couple $C_2(t)$ exercé est connu au cours du temps ;
- l'action du patient sur l'avant-bras, modélisée par une force appliquée à l'extrémité B de l'avant-bras et définie par :

$$\left\{\tau_{(\text{Force}\to\text{Avant}-\text{bras})}\right\} = \left\{\begin{array}{c} X_F\vec{x} + Z_F\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_B$$

On veut déterminer les deux équations permettant de décrire le mouvement des deux axes de l'orthèse. On suppose pour cela que les deux liaisons pivots sont **parfaites**.

Q 27. Le Principe Fondamental de la Dynamique permet d'établir la relation suivante (admise) :

$$\begin{aligned} C_1(t) =& (B_1 + B_2 + m_1\lambda_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2\lambda_2^2)\ddot{\gamma} + (B_2 + m_2\lambda_2^2)\ddot{\delta} \\ &+ m_2 l_1 \left(\lambda_2(2\ddot{\gamma} + \ddot{\delta})\cos\delta + \lambda_2(\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma} + \dot{\delta})^2)\sin\delta\right) \\ &+ m_1 g\lambda_1 \sin\gamma + m_2 g(l_1\sin\gamma + \lambda_2\sin(\gamma + \delta)) \\ &- X_F(l_1\cos\gamma + l_2\cos(\gamma + \delta)) + Z_F(l_1\sin\gamma + l_2\sin(\gamma + \delta)) \end{aligned}$$

Détailler (**sans calcul**) la démarche qui a permis d'obtenir cette équation, on précisera en particulier l'isolement, le bilan des Actions Mécaniques Extérieures et le choix des équations utilisées.

Q 28. Écrire une deuxième relation issue du Principe Fondamental de la Dynamique, **indépendante** de la précédente, faisant intervenir le couple $C_2(t)$, et qui permette de ne pas faire apparaître les composantes L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2 des torseurs des actions de liaison. On détaillera la démarche de la même façon que ci-dessus.

Q 29. En déduire que les deux équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + \mathbf{B}\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + C + \mathbf{Q}\begin{pmatrix} X_F \\ Z_F \end{pmatrix}$$

où C est un vecteur et $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{Q}$ sont des matrices 2×2, que l'on précisera en fonction des paramètres du mouvement (γ, δ) et de leurs dérivées premières ($\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$).

On veut vérifier le respect du cahier des charges dans le cas **statique** (régime permanent). On suppose donc que les paramètres du mouvement ainsi que les données ($C_1(t)$, $C_2(t)$, X_F, Z_F) sont indépendantes du temps.

Q 30. Calculer les couples (C_1, C_2) exercés par les actionneurs sur les axes des articulations dans le cas où l'on n'exerce pas de force à l'extrémité du solide {Avant-bras} ($X_F = 0$, $Z_F = 0$) ; discuter de la configuration angulaire la plus **défavorable** vis-à-vis du cahier des charges.

Q 31. Compte-tenu du cahier des charges, quelle charge statique **maximale** peut-on exercer sur l'extrémité du solide {Avant-bras} ?

III.B – Synthèse d'une loi de commande « deux axes »

Objectif

L'objectif de cette partie est de déterminer une loi de commande afin que la relation entre les variations des positions ${}^t(\gamma\ \delta)$ du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force Z_F exercée par le patient soit celle d'une raideur en torsion de valeurs $(K_1; K_2)$ données dans le cahier des charges de la figure 12. La raideur comparativement à la force X_F ne sera pas à vérifier dans ce cas d'étude.

L'équation dynamique décrivant le comportement de l'exosquelette est de la forme

$$\mathbf{A}(q,\dot{q})\ddot{q} + \mathbf{B}(q,\dot{q})\dot{q} + C(q,\dot{q}) + \mathbf{Q}(q,\dot{q}) \cdot F = C_a$$

où $C_a = {}^t(C_1\ C_2)$, $q = {}^t(\gamma\ \delta)$ et $F = {}^t(X_F\ Z_F)$. On note sous forme vectorielle $q_{\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}}\ \delta_{\text{ref}})$ les consignes de positions angulaires. La loi de commande adoptée est organisée selon deux boucles :

- une boucle externe linéaire ;
- une boucle interne non linéaire qui détermine le couple C_a par la relation

$$C_a = \mathbf{B}(q,\dot{q})\dot{q} + C(q,\dot{q}) + \mathbf{A}(q,\dot{q})U$$

où $U = {}^t(U_1\ U_2)$ sont les deux nouvelles commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.

Le principe de cette loi de commande est donné par la structure représentée par le schéma de la figure 16.

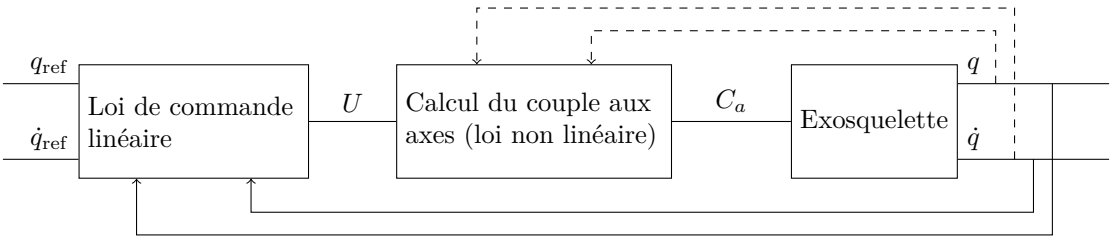


Figure 16 Structure de la commande « deux axes »

Q 32. Donner au moins un argument, en particulier vis-à-vis du cahier des charges souhaité, de l'intérêt de la boucle interne correspondant à la loi non linéaire donnée précédemment.

Pour la synthèse de la loi de commande, il est nécessaire de **linéariser** le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement défini par les positions articulaires ${}^t(\gamma_0\ \delta_0)$ et les forces ${}^t(X_{F0}\ Z_{F0})$. On note autour de ce point de fonctionnement :

- $u = {}^t(u_1\ u_2)$ les variations des grandeurs de commande autour de $U_0 = {}^t(U_{10}\ U_{20})$;
- $q_1 = {}^t(\gamma_1\ \delta_1)$ les variations des positions angulaires des deux articulations autour de $q_0 = {}^t(\gamma_0\ \delta_0)$;
- $f = {}^t(x_F\ z_F)$ les variations des efforts exercés par le patient autour de $F_0 = {}^t(X_{F0}\ Z_{F0})$.

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut-être réécrit selon la forme $\ddot{q} = U + N(q,\dot{q},F)$, où $N(q,\dot{q},F) = \mathbf{M}(q,\dot{q}) \cdot F$.

Q 33. Préciser l'expression de la matrice $\mathbf{M}$ en fonction de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{Q}$.

Q 34. Donner, par exemple sous forme algorithmique, une démarche permettant de linéariser le modèle dynamique selon la forme $\ddot{q}_1 = \tilde{\mathbf{A}}q_1 + \tilde{\mathbf{B}}\dot{q}_1 + \tilde{\mathbf{G}}u + \tilde{\mathbf{H}}f$ où $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ sont des matrices constantes, éventuellement dépendantes du point de fonctionnement.

Indication : la démarche de linéarisation fait intervenir $\frac{\partial N}{\partial q}$, $\frac{\partial N}{\partial \dot{q}}$ et $\frac{\partial N}{\partial F}$; l'expression explicite du modèle linéarisé en fonction de $\mathbf{M}$ n'est pas demandée.

On admet pour la suite que le modèle linéarisé, décrivant les variations des positions ${}^t(\gamma_1\ \delta_1)$ du bras, autour du point de fonctionnement $q_0 = {}^t(0{,}6\ 0{,}7)$ rad et $F_0 = {}^t(0\ -5)$ N, est représenté par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\gamma}_1 \\ \ddot{\delta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18{,}4 & -33 \\ 4 & -56{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3{,}9 \\ -45{,}4 \end{pmatrix} z_F$$

On note $q_{1\text{ref}} = {}^t(\gamma_{\text{ref}}\ \delta_{\text{ref}})$ les variations de consignes de position. L'objectif des questions suivantes est la synthèse d'une loi de commande linéaire en vue d'assurer la raideur souhaitée entre les variations des positions ${}^t(\gamma_1\ \delta_1)$ des deux articulations et la variation de l'effort z_F exercé par le patient. L'adaptation de la loi de commande au point de fonctionnement ne fait pas partie du cadre de cette étude.

Q 35. En **justifiant la réponse**, étudier la stabilité du modèle donné ci-dessus.

Q 36. En utilisant un raisonnement qualitatif (**sans calcul**), et en supposant que le système bouclé est stable, justifier qu'une régulation de type proportionnelle-intégrale (sur chaque composante des positions du bras) :

$$\frac{U_1(p)}{\varepsilon_1(p)} = K_1\left(1+\frac{1}{T_1 p}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{U_2(p)}{\varepsilon_2(p)} = K_2\left(1+\frac{1}{T_2 p}\right)$$

où $\varepsilon_1(t) = \gamma_{1\text{ref}} - \gamma_1$ et $\varepsilon_2(t) = \delta_{1\text{ref}} - \delta_1$ sont les écarts sur chaque axe d'articulation étudié, ne permet pas d'assurer l'objectif escompté, c'est-à-dire un comportement de type raideur entre les variations des positions γ_1 et δ_1, du bras et de l'avant-bras, et la variation de la force z_F exercée par le patient.

Pour la suite, on adopte la loi de commande : $u(t) = \mathbf{K}_p(q_{1\text{ref}} - q_1) + \mathbf{K}_v(\dot{q}_{1\text{ref}} - \dot{q}_1)$ avec :

$$\mathbf{K}_p = \begin{pmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K}_v = \begin{pmatrix} k_{v11} & k_{v12} \\ k_{v21} & k_{v22} \end{pmatrix}$$

Par souci de simplicité, on pourra utiliser $q_{1\text{ref}} = 0$ et $\dot{q}_{1\text{ref}} = 0$.

Q 37. Déterminer les coefficients des matrices $\mathbf{K}_p$ et $\mathbf{K}_v$ afin que le comportement entrée-sortie entre les positions du bras et de l'avant bras, et les forces exercées par le patient, soit celui de fonctions du deuxième ordre :

$$\frac{\gamma_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_1}{1+\frac{2\xi}{\omega_1}p+\frac{1}{\omega_1^2}p^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta_1(p)}{Z_F(p)} = \frac{K_2}{1+\frac{2\xi}{\omega_2}p+\frac{1}{\omega_2^2}p^2}$$

permettant d'obtenir les valeurs des raideurs souhaitées et caractérisées par un coefficient d'amortissement $\xi = 0{,}7$. Justifier alors que la bande passante ne peut pas être choisie d'une manière arbitraire.

Q 38. Les figures 17 et 18 montrent un ensemble de résultats correspondant à deux types d'essais :

- pour le réglage de la loi de commande correspondant à celui de la question 37, la figure 17 montre les évolutions des positions angulaires du bras et de l'avant-bras (à partir du point de fonctionnement ${}^t(0{,}6 \quad 0{,}7)$ rad) et des couples sur les axes des articulations, en réponse à une variation intervenant à $t_0 = 1$ s de la force $z_F = \Delta Z_F = -1$ N ;
- la figure 18 montre le ralliement à une position de référence avec des efforts constants, $X_F = 50$ N et $Z_F = -50$ N en partant de conditions initiales nulles.

Commenter ces courbes et conclure sur l'adéquation de la loi de commande proposée comparativement au cahier des charges.

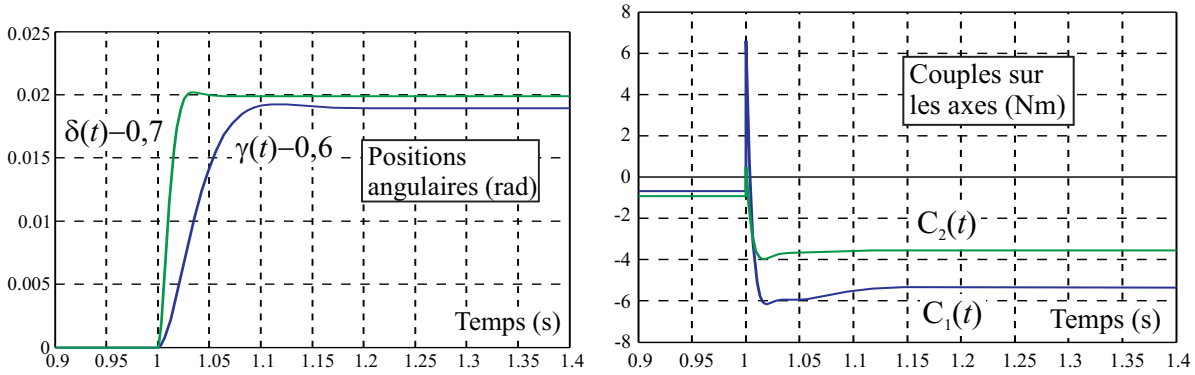


Figure 17 Réponses temporelles (angles des articulations et couples sur les axes) pour une variation de force $z_F = -1$ N

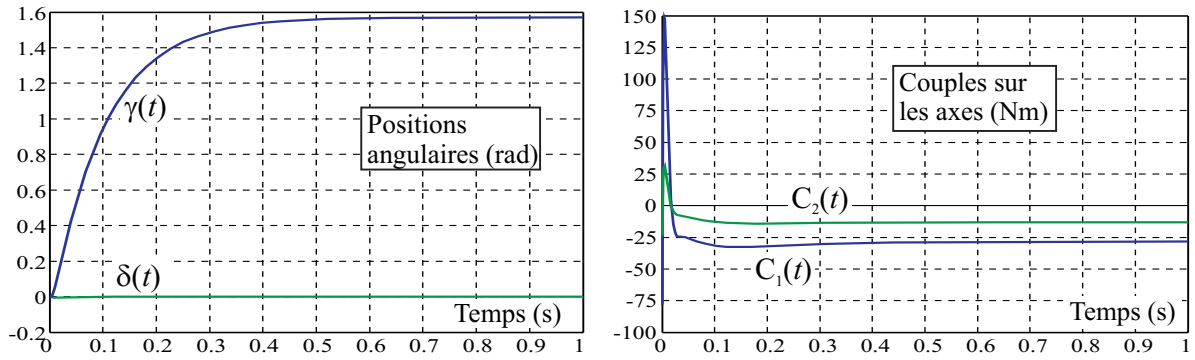


Figure 18 Ralliement à une position de référence avec des efforts constants $X_F = 50$ N et $Z_F = -50$ N

• • • FIN • • •

Ne rien écrire

dans la partie barrée

Concours Centrale-Supélec 2010

NOM : _____ PRÉNOMS : _____

Signature :

Composition de **S2I** Filière **PSI**

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir rempli complètement cet en-tête

NUMÉRO DE PLACE

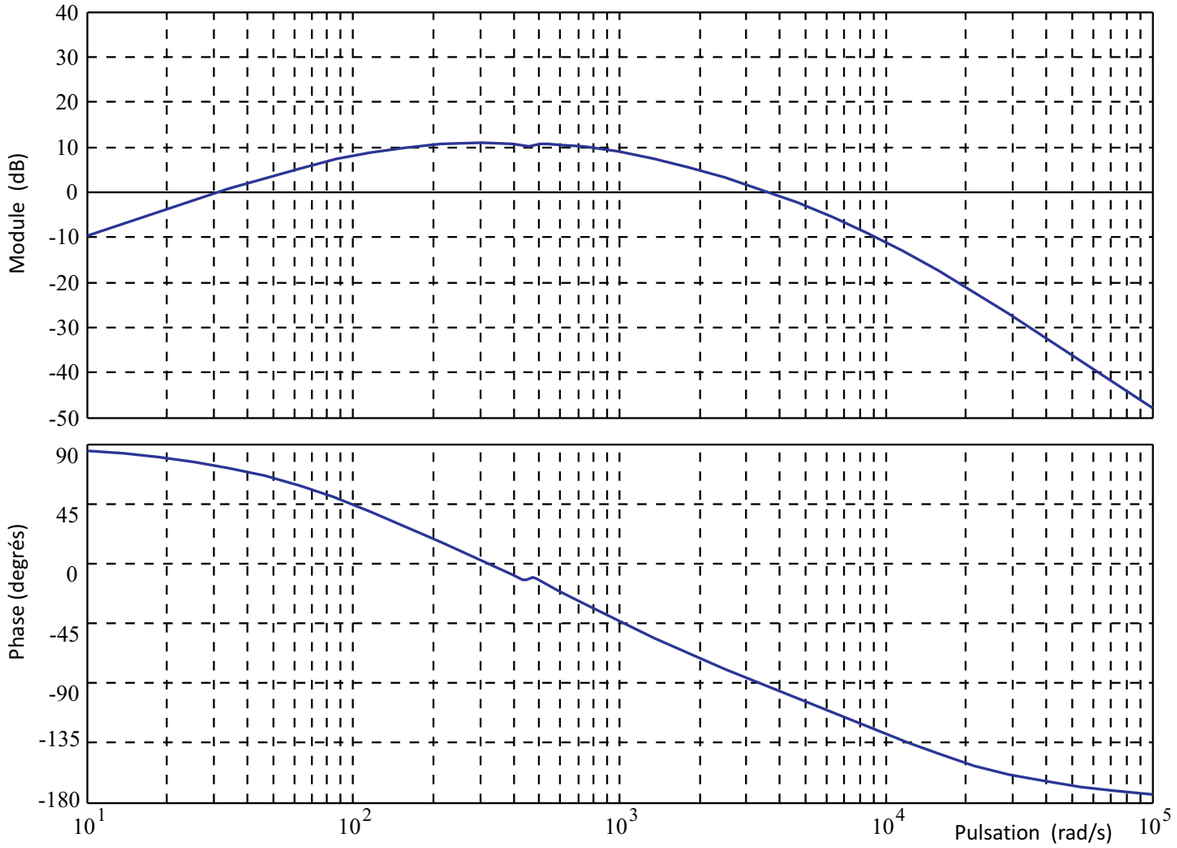


Figure R4

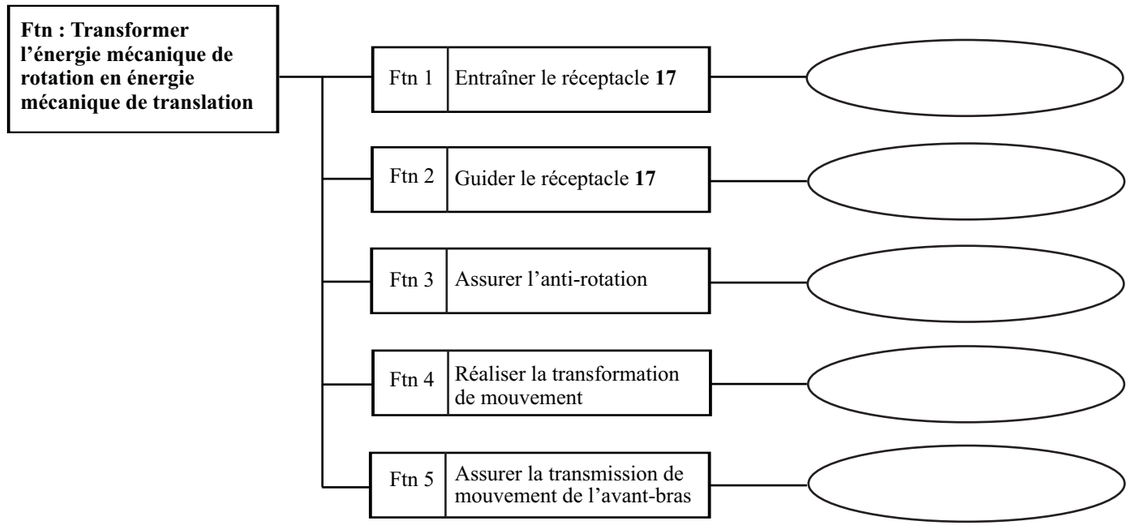


Figure R1

Ne rien écrire dans la partie barrée

Ne rien écrire dans la partie barrée

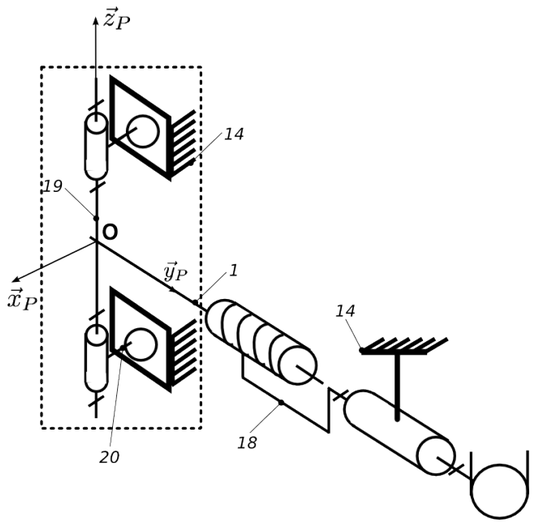


Figure R2.a

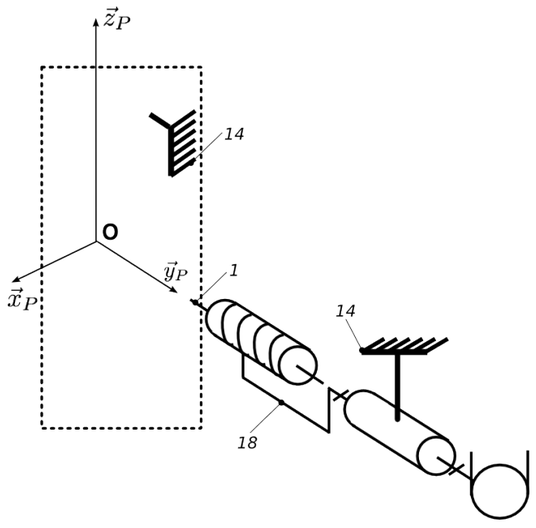


Figure R2.b

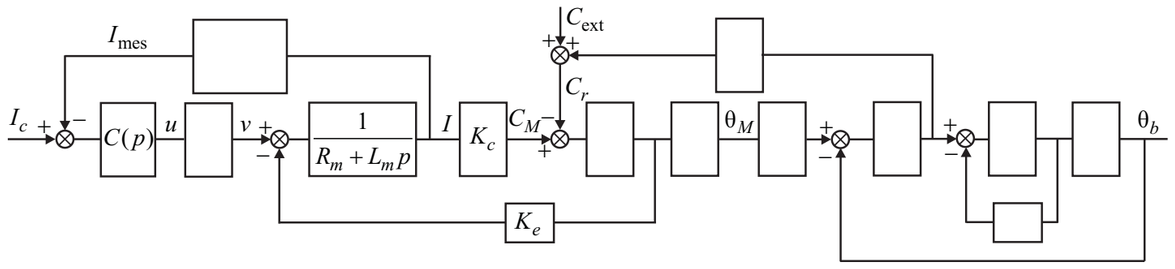


Figure R3

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Modélisation des liaisons, graphe des liaisons et schéma cinématique
- Chaînes de solides : liaisons équivalentes, mobilité et hyperstatisme
- Cinématique des mécanismes : composition des mouvements, contact ponctuel, lois entrée-sortie et fermetures
- Énergétique : puissances, théorème de l'énergie cinétique, rendement
- Transmetteurs de puissance et trains d'engrenages
- Correction des systèmes asservis : correcteurs P, PI et à avance de phase
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi