Concours Centrale-Supélec, France

Session 2012, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Contexte et partie I : étude préliminaire de la plateforme
- Partie II.A : modèle de satellite rigide
- Partie II.B : actionneurs du contrôle d'attitude
- Partie III : contrôle d'attitude du satellite

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2012/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

S2I

PSI

2012

4 heures Calculatrices autorisées

Contrôle d'orientation du satellite DEMETER

Contexte

Les satellites d'observation terrestre sont une aide importante dans de nombreux domaines et en particulier pour tenter de prédire les phénomènes liés à l'environnement ou les tremblements de terre. Dans ce contexte, DEMETER est un satellite français d'observation géophysique : *Detection of Electro Magnetic Emissions Transmitted from Earthquake Regions*. Les objectifs scientifiques de DEMETER sont multiples :

- étudier les perturbations ionosphériques dues aux activités sismiques ;
- étudier les perturbations ionosphériques dues aux activités humaines ;
- étudier les conséquences pré- et post-sismiques dans l'ionosphère ;
- apporter une contribution à la compréhension des mécanismes de génération de ces perturbations ;
- donner une information globale sur l'environnement électromagnétique de la Terre à l'altitude du satellite.



Figure 1 Satellite d'observation géophysique DEMETER

Ce sujet a pour objet la conception et la validation du système de contrôle d'attitude et d'orbite (ou SCAO), l'attitude désignant l'orientation du satellite par rapport à un trièdre de référence. Le contrôle des satellites est souvent fondé autour de solutions complémentaires :

- la propulsion par jet d'hydrazine ;
- les roues de réaction ;
- les magnétocoupleurs.

Cette étude s'intéresse plus particulièrement au pointage fin ou mode nominal opérationnel (MNO) dont la finalité est d'assurer une précision d'attitude de 0,04°. Dans ce mode, seuls les roues de réaction et les magnétocoupleurs sont utilisés.

L'étude se décompose en trois parties. La partie **I** porte sur l'analyse de la plateforme utilisée pour la mission DEMETER. Les objectifs de la partie **II** sont d'une part la mise en place des modèles dynamiques qui seront exploités pour la définition de la loi de commande, d'autre part la vérification du dimensionnement des actionneurs utilisés pour cette mission. Enfin, dans la partie **III**, il s'agira d'une part de déterminer et de valider les lois de commande pour le contrôle d'attitude du satellite, d'autre part de proposer des solutions permettant d'assurer que l'ensemble du système, en particulier les actionneurs, répond aux exigences du cahier des charges.

BY-NC-SA

I Étude préliminaire de la plateforme utilisée pour le satellite

Un satellite est un engin spatial sans pilote dont l'architecture est fortement caractérisée par la mission qu'il doit accomplir. Il est constitué de deux sous-ensembles :

- la charge utile comprenant toute l'instrumentation scientifique embarquée spécifique à la mission ;
- la plateforme comprenant la structure mécanique du satellite et tous les éléments assurant l'ensemble des fonctions nécessaires à l'utilisation de la charge utile (système de contrôle d'attitude et d'orbite ou SCAO, régulation de la puissance électrique, régulation thermique, communications avec la station au sol,...).

Dans le cas du satellite DEMETER, ces deux sous-systèmes sont même séparés physiquement, la plateforme étant fondée sur un modèle générique appelé Myriade et destiné au développement de micro-satellites du même type que DEMETER.

La structure de la plateforme Myriade, montrée dépliée sur la **figure 2**, est un parallélépipède de base carrée de 60 centimètres de côté, et de hauteur 50 centimètres. Elle est constituée :

- d'une plaque de base massive en aluminium assurant l'interface avec le lanceur et susceptible d'accueillir le module de propulsion ;
- de quatre panneaux latéraux en nid d'abeilles permettant la fixation des équipements ;
- d'un panneau supérieur, également en nid d'abeilles, destiné à recevoir la charge utile.

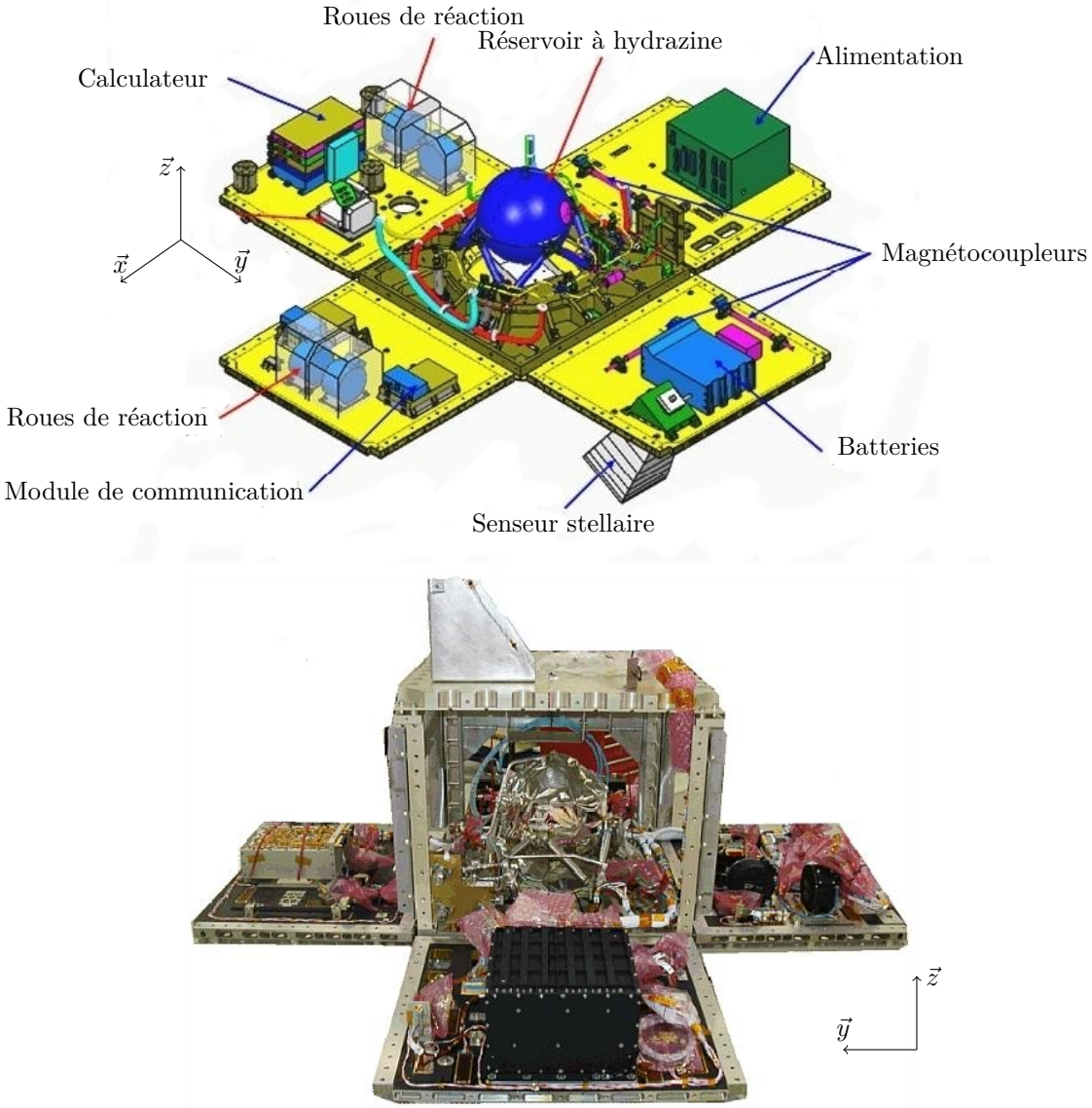


Figure 2 Plateforme Myriade (panneaux latéraux dépliés)

Les équipements sont les suivants :

- un module de propulsion utilisant quatre moteurs à hydrazine qui permet un contrôle de l'orbite du satellite ;
- quatre roues de réaction et trois magnétocoupleurs qui assurent un contrôle de l'orientation du satellite ;
- un senseur stellaire qui permet de mesurer l'orientation du satellite vis-à-vis des étoiles observées ;
- un calculateur qui élabore les grandeurs de commande en fonction de l'écart entre les valeurs mesurées et les consignes imposées ;

BY-NC-SA

- des thermistances qui rendent possible un contrôle de la température ;
- un module de communication avec la station au sol ;
- un système de batteries alimentées par deux panneaux solaires articulés et orientables.

Le satellite DEMETER est placé sur une orbite polaire (c'est-à-dire une orbite circulaire dont le plan contient les deux pôles terrestres) dans le référentiel géocentrique qui est un référentiel galiléen, d'origine le centre de la Terre et de directions stellaires fixées. Son altitude est $h = 710$ km. On fait l'hypothèse que le satellite n'est soumis qu'à l'action de la Terre modélisée par :

$$\left\{\tau_{(\text{Terre}\to\text{satellite})}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{(\mathcal{R}+h)^2}\vec{Z} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_G$$

où G est le centre d'inertie du satellite de masse $m = 129$ kg, $M = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg et $\mathcal{R} = 6356$ km sont respectivement la masse et le rayon de la Terre supposée sphérique. $\vec{Z}$ désigne le vecteur unitaire colinéaire (de même sens) au vecteur reliant le centre de la Terre au centre d'inertie du satellite et $\mathcal{G} = 6{,}67\times10^{-11}$ $\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ est la constante universelle de la gravitation.

Compte tenu de l'orbite choisie pour DEMETER, ses panneaux solaires ne captent la lumière du Soleil que pendant une durée limitée à chaque révolution. Le courant n'est généré par les cellules des panneaux que pendant ces périodes éclairées qui permettent alors de recharger le système de batteries. Les caractéristiques de gestion de l'énergie sur DEMETER sont précisées sur le cahier des charges partiel de la **figure 3**.

Durée d'éclairement des panneaux solaires (à chaque révolution)	65 min
Capacité totale du système de batteries	15 A · h
Nombre de circuits électriques à alimenter	44
Intensité maximale dans chaque circuit	0,6 A

Figure 3 Cahier des charges partiel concernant la gestion de l'énergie de DEMETER

Q 1. Calculer la vitesse linéaire du centre d'inertie du satellite par rapport au référentiel géocentrique. En déduire la pulsation orbitale $\omega_0 = 2\pi/T$, où T est la période de révolution du satellite autour de la Terre.

Q 2. Calculer la durée pendant laquelle, sur une période de révolution, le satellite est masqué par la Terre et n'est donc pas éclairé par la lumière du Soleil. Vérifier si la capacité du système de batteries est suffisante pour faire face à la consommation du satellite pendant ces intervalles d'obscurité.

II Modélisation dynamique du système satellite

Objectif

L'objet de cette partie est la définition et la mise en place de modèles dynamiques du satellite et des actionneurs. Les modèles établis seront utilisés pour l'étude de la loi de commande en vue d'asservir l'attitude du satellite, c'est-à-dire son orientation par rapport à des directions de référence.

La phase de modélisation s'articule en deux étapes. Dans la première, il s'agit d'une part d'établir le modèle dynamique du satellite dans son environnement en l'assimilant à un solide indéformable, d'autre part de mettre en évidence les couples perturbateurs. Dans une deuxième étape, la modélisation des actionneurs à roue de réaction est effectuée et leur dimensionnement vérifié.

II.A – Modèle de satellite rigide

On s'intéresse ici à l'évolution de l'orientation du satellite quand il n'est soumis qu'à l'action de la Terre. Pour cela, on introduit les référentiels suivants :

- $R_g(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ référentiel géocentrique, supposé galiléen, d'origine le centre de la Terre (supposée parfaitement sphérique) ;
- $R_o(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ référentiel orbital, d'origine le centre d'inertie du satellite, où $\vec{X}$ est le vecteur unitaire tangent à l'orbite circulaire du satellite autour de la Terre, $\vec{Z}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OG}$ et de même sens et $\vec{Y}$ complète le repère orthonormé direct ainsi obtenu ;
- $R_s(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ référentiel du satellite, d'origine le centre d'inertie du satellite, et où $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont les axes principaux d'inertie du satellite.

BY-NC-SA

Le référentiel orbital est en rotation uniforme autour de l'axe $(O,\vec{Y})$ par rapport au référentiel géocentrique, de telle sorte que le vecteur vitesse de rotation instantanée associé s'écrit $\vec{\Omega}(R_o/R_g)=\omega_0\vec{Y}$ où ω_0 est la pulsation orbitale (constante) définie dans la **question 1**.

Le passage du référentiel orbital au référentiel du satellite se fait par l'intermédiaire des trois angles de Cardan définis sur la **figure 4** :

- ϕ est l'angle de roulis ;
- θ est l'angle de tangage ;
- ψ est l'angle de lacet.

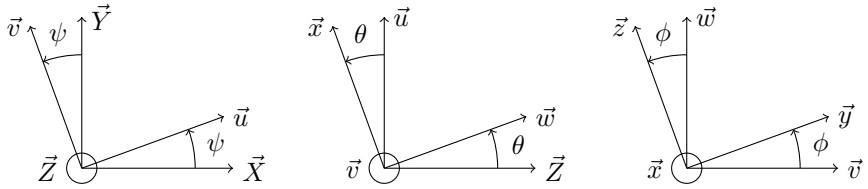


Figure 4 Définition des angles de lacet, tangage et roulis.

Q 3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{Z}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ liée au satellite. Pour quelles valeurs des angles de roulis, tangage et lacet a-t-on un « pointage Terre », c'est-à-dire $\vec{Z}=\vec{z}$?

On suppose que le satellite est en mode de pointage fin (tel qu'il sera étudié dans la partie **III**) : les angles de roulis, tangage et lacet sont donc très petits :

$$\phi=o(1)\qquad\theta=o(1)\qquad\psi=o(1)$$

De même, on suppose que les dérivées temporelles de ces angles sont très petites devant la pulsation orbitale :

$$\dot{\phi}=o(\omega_0)\qquad\dot{\theta}=o(\omega_0)\qquad\dot{\psi}=o(\omega_0)$$

On obtient alors l'expression suivante (admise), à l'ordre un en $(\phi,\theta,\psi,\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})$, pour le vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}(R_s/R_g)$ du référentiel du satellite par rapport au référentiel géocentrique :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_g)=\left(\psi\omega_0+\dot{\phi}\right)\vec{x}+\left(\omega_0+\dot{\theta}\right)\vec{y}+\left(-\phi\omega_0+\dot{\psi}\right)\vec{z}$$

On considère en outre que le satellite est un solide indéformable unique, de caractéristiques suivantes :

- centre d'inertie G tel que $\|\overrightarrow{OG}\|=7066$ km ;
- masse $m=129$ kg ;
- matrice d'inertie $I(G,s)=\begin{pmatrix}I_x&0&0\\0&I_y&0\\0&0&I_z\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ avec $I_x=31{,}4$ kg$\cdot$m^2, $I_y=35{,}7$ kg$\cdot$m^2, $I_z=21{,}2$ kg$\cdot$m^2.

Il est soumis, en plus de l'action de la Terre, supposée uniforme, à des actions mécaniques supplémentaires :

$$\left\{\tau_{(\text{extérieur}\to\text{satellite})}\right\}=\left\{\begin{matrix}R_x^{ext}\vec{x}+R_y^{ext}\vec{y}+R_z^{ext}\vec{z}\\C_x^{ext}\vec{x}+C_y^{ext}\vec{y}+C_z^{ext}\vec{z}\end{matrix}\right\}_G$$

Q 4. Exprimer littéralement, au point G et dans le repère $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le moment dynamique $\vec{\delta}(G,R_s/R_g)$ à l'ordre un en $(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi},\ddot{\phi},\ddot{\theta},\ddot{\psi})$ du mouvement du satellite par rapport au référentiel géocentrique.

Q 5. En déduire les trois équations scalaires du mouvement faisant intervenir les angles de roulis, tangage et lacet (ϕ,θ,ψ) ainsi que leurs dérivées temporelles $(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi},\ddot{\phi},\ddot{\theta},\ddot{\psi})$.

Q 6. On note $\Phi(p)$, $\Psi(p)$, $\mathrm{C_x^{ext}}(p)$ et $\mathrm{C_z^{ext}}(p)$ les transformées de Laplace de $\phi(t)$, $\psi(t)$, $C_x^{ext}(t)$ et $C_z^{ext}(t)$ respectivement. Montrer, en prenant des conditions initiales nulles, que l'on peut écrire :

$$H_{\Phi x}(p)=\frac{\Phi(p)}{\mathrm{C_x^{ext}}(p)}=\frac{\kappa_2+\beta p^2}{(\kappa_1+\alpha p^2)(\kappa_2+\beta p^2)+\gamma^2p^2}$$

$$H_{\Phi z}(p)=\frac{\Phi(p)}{\mathrm{C_z^{ext}}(p)}=\frac{\gamma p}{(\kappa_1+\alpha p^2)(\kappa_2+\beta p^2)+\gamma^2p^2}$$

où l'on précisera les expressions de κ_1, κ_2, α, β et γ en fonction de I_x, I_y, I_z et ω_0. Tous calculs faits, il est possible de factoriser les dénominateurs de ces deux fonctions de transfert sous la forme suivante (admise) :

$$(\kappa_1+\alpha p^2)(\kappa_2+\beta p^2)+\gamma^2p^2=(\omega_0^2+p^2)\left((I_y-I_z)(I_y-I_x)\omega_0^2+I_xI_zp^2\right)$$

Étudier la stabilité des modèles correspondant aux fonctions de transfert $H_{\Phi x}(p)$ et $H_{\Phi z}(p)$.

BY-NC-SA

En réalité, l'action de la Terre n'est pas rigoureusement la même en tout point du satellite. Un moment lié à ce « gradient de pesanteur » s'exerce donc sur le satellite.

On rappelle que l'action de la Terre exercée sur un petit volume élémentaire de masse dm situé au voisinage d'un point P du satellite s'écrit :

$$\left\{\tau_{(\text{Terre}\to \mathrm{d}m)}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -\mathcal{G}\dfrac{M\mathrm{d}m}{\|\overrightarrow{OP}\|^3}\overrightarrow{OP} \\ \vec{0} \end{array}\right\}_P$$

où O et $M = 6\times10^{24}$ kg sont respectivement le centre et la masse de la Terre, et $\mathcal{G} = 6{,}67\times10^{-11}$ m$^3\cdot$kg$^{-1}\cdot$s^{-2} est la constante universelle de la gravitation. La **figure 5** précise le paramétrage associé.

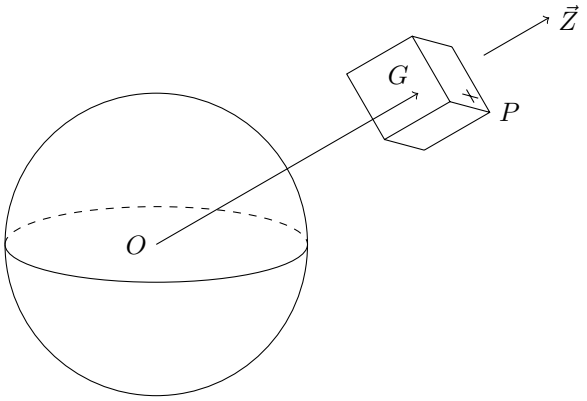


Figure 5 Paramétrage pour la prise en compte du « gradient de pesanteur »

Q 7. Montrer que le moment de l'action de la Terre sur le volume V du satellite peut s'exprimer en G par :

$$\vec{M}_G(\text{Terre}\to\text{satellite}) = -\mathcal{G}\frac{M}{\|\overrightarrow{OG}\|^3}\iiint_V \left(\|\overrightarrow{OG}\| - 3\,\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{Z}\right)\,\overrightarrow{GP}\wedge\vec{Z}\,\mathrm{d}m$$

On utilisera pour cela sans démonstration le développement limité suivant :

$$\|\vec{Z}+\varepsilon\vec{a}\|^n = 1 + n\varepsilon\;\vec{Z}\cdot\vec{a} + o(\varepsilon)$$

où $\vec{a}$ est un vecteur arbitraire, n un entier relatif quelconque et ε un scalaire petit devant 1.

On admet que le résultat de la **question 7** donne pour l'expression à l'ordre un en (ϕ,θ,ψ) du moment associé au « gradient de pesanteur » :

$$\vec{M}_G(\text{Terre}\to\text{satellite}) = 3\omega_0^2(I_z-I_y)\phi\vec{x} - 3\omega_0^2(I_x-I_z)\theta\vec{y}$$

Q 8. Déduire des équations obtenues à la **question 5** les équations vérifiées par les angles de roulis, tangage et lacet dans le cas de la prise en compte du « gradient de pesanteur ». Étudier la stabilité du modèle correspondant à la fonction de transfert :

$$H_{\Theta y}(p) = \frac{\Theta(p)}{\mathrm{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{ext}}(p)}$$

où $\Theta(p)$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{ext}}(p)$ sont les transformées de Laplace de $\theta(t)$ et $C_y^{ext}(t)$ respectivement. En supposant que l'étude de stabilité faite à la **question 6** est encore valable ici, conclure à propos du choix de la géométrie du satellite.

II.B – Actionneurs utilisés pour le contrôle d'attitude

La partie précédente a permis de mettre en évidence que l'orientation du satellite avait tendance à évoluer naturellement tout au long de son orbite si aucun dispositif de contrôle n'était prévu. Au moment perturbateur créé par le phénomène de « gradient de pesanteur » vient notamment s'ajouter un moment parasite supplémentaire, non étudié ici, associé aux effets de traînée aérodynamique qui ne sont pas négligeables à l'altitude où le satellite est en orbite et qui sont périodiques de pulsation $2\omega_0$. Il est donc nécessaire d'utiliser des actionneurs pour agir sur cette orientation de façon à assurer un pointage particulier.

Les actionneurs ont donc pour but de produire les couples nécessaires pour compenser les moments perturbateurs décrits précédemment : il s'agit de roues de réaction qui sont des roues de forte inertie axiale dont on fait varier au cours du temps la vitesse de rotation autour de leur axe de rotation. La **figure 6** présente une photographie d'une roue de réaction analogue à celles utilisées sur DEMETER.

BY-NC-SA

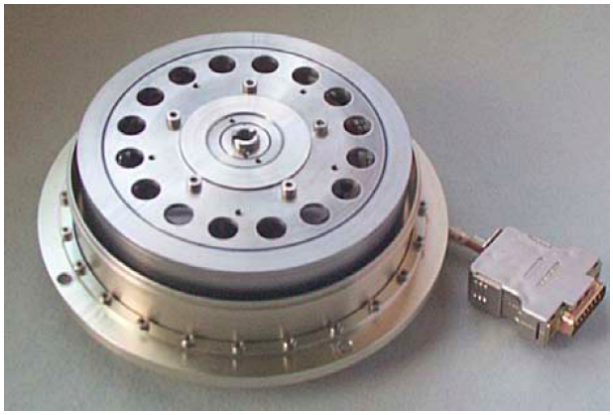


Figure 6 Roue de réaction (carter ouvert)

II.B.1) Principe de fonctionnement d'une roue de réaction

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'action d'une seule roue de réaction, d'axe $(G_r,\ \vec{y})$. On note :

- $\vec{\Omega}(R_r/R_s) = \omega_r \vec{y}$ le vecteur vitesse de rotation instantanée de la roue R_r par rapport au satellite R_s, où $\omega_r(t) = \dot{\theta}_r(t)$ désigne la dérivée temporelle de l'angle de la rotation relative de la roue par rapport au satellite ;
- $\vec{\Omega}(R_s/R_g) = \Omega_x \vec{x} + \Omega_y \vec{y} + \Omega_z \vec{z}$ le vecteur vitesse de rotation instantanée du satellite R_s par rapport au référentiel géocentrique R_g ;
- m_r la masse de la roue ;
- G_r le centre d'inertie de la roue, situé sur l'axe de celle-ci ;
- $I(G_r, R_r) = \begin{pmatrix} I_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & I_{rz} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ la matrice d'inertie de la roue, avec $I_{rx} < I_{ry}$ et $I_{rz} < I_{ry}$.

Les actions mécaniques qui s'exercent sur la roue R_r sont :

- l'action de la Terre, modélisée par

$$\left\{\tau_{(\text{Terre}\to\text{roue})}\right\} = \left\{ \begin{matrix} -\mathcal{G}\dfrac{M m_r}{(\mathcal{R}+h)^2}\vec{Z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_r}$$

- l'action de la liaison pivot supposée parfaite entre la roue et le satellite

$$\left\{\tau_{(\text{satellite}\to\text{roue})}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_l(t) \\ \vec{C}_l(t) \end{matrix} \right\}_{G_r}$$

- l'action du stator du moteur (lié au satellite) sur le rotor du moteur (lié à la roue), modélisée par

$$\left\{\tau_{(\text{stator}\to\text{rotor})}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ (C_m(t) - C_f(t))\vec{y} \end{matrix} \right\}_{G_r}$$

  où C_m désigne le couple moteur, et C_f un couple résistant. Comme l'ensemble est lubrifié, le couple résistant est en fait un couple de frottement fluide $C_f(t) = f\omega_r(t)$ où le coefficient de frottement f est supposé connu avec précision.

Q 9. En supposant que les composantes $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ et leurs dérivées temporelles sont négligeables devant $\omega_r(t)$ et $\dot{\omega}_r(t)$ respectivement, déduire de l'application du théorème du moment dynamique l'équation scalaire du mouvement vérifiée par $\omega_r(t)$. Grâce à cette équation, exprimer, en fonction de I_{ry} et $\dot{\omega}_r(t)$, le moment exercé par la roue sur le satellite.

Q 10. En partant de conditions initiales nulles, déterminer, en fonction de I_y et I_{ry}, la relation entre la vitesse de rotation autour de l'axe $\vec{y}$ du satellite $\dot{\theta}(t)$ et la vitesse de rotation de la roue $\omega_r(t)$. On utilisera pour cela l'une des équations déterminées dans la **question 5**, en supposant pour simplifier que le torseur des actions mécaniques supplémentaires $\left\{\tau_{(\text{extérieur}\to\text{satellite})}\right\}$ ne comporte que l'action de la roue sur le satellite (on négligera donc toutes les autres actions, perturbatrices, exercées sur le satellite) et que les axes $(G, \vec{y})$ et $(G_r, \vec{y})$ sont confondus. On supposera de plus que le coefficient de frottement fluide, entre le stator et le rotor de la roue de réaction, est nul : $f = 0$.

En réalité, le satellite est équipé de quatre roues de réaction de caractéristiques identiques. L'une est orientée selon l'axe $\vec{x}$, deux autres selon l'axe $\vec{y}$ et la quatrième est d'axe parallèle à $\vec{z}$. On rappelle que les axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont les axes principaux d'inertie du satellite et sont concourants en G, centre d'inertie du satellite.

Q 11. Justifier l'intérêt de disposer deux roues de réaction selon l'axe $\vec{y}$ plutôt qu'une seule.

BY-NC-SA

II.B.2) Dimensionnement des roues de réaction

On s'intéresse maintenant au dimensionnement des roues de réaction. Le cahier des charges associé est détaillé sur la **figure 7**.

Inertie de la roue autour de son axe	$I_a = 4 \times 10^{-4}$ kg · m^2
Hauteur maximale autorisée (selon l'axe de la roue)	$H = 100$ mm
Puissance maximale consommée autorisée par le moteur	$\mathcal{P} = 1{,}5$ W
Masse	minimale

Figure 7 Cahier des charges pour les roues de réaction

Chaque roue est conçue selon l'organisation suivante, détaillée sur la **figure 8** :

- la roue proprement dite est un cylindre de rayon r et de hauteur h tous deux à déterminer ; elle est fabriquée en polyuréthane, de masse volumique $\rho_r = 1140$ kg · m^{-3} et de limite d'élasticité $\sigma_e = 9$ MPa, qui caractérise la résistance de la roue à des actions mécaniques ;
- la roue est montée dans un carter en tôles d'acier d'épaisseur $e = 2$ mm et de masse volumique $\rho_c = 7800$ kg · m^{-3}, composé des éléments suivants :
  - un cylindre tubulaire de hauteur $H = 100$ mm (encombrement maximal autorisé d'après le cahier des charges, mais hauteur nécessaire pour inclure le guidage et la motorisation de la roue) et de rayon extérieur R à déterminer ;
  - deux plaques circulaires, de rayon R à déterminer et d'épaisseur e, dont l'une est placée au-dessus et l'autre au-dessous du cylindre tubulaire ;
- il existe un jeu radial $j = R - e - r = 2$ mm entre la roue et le carter.

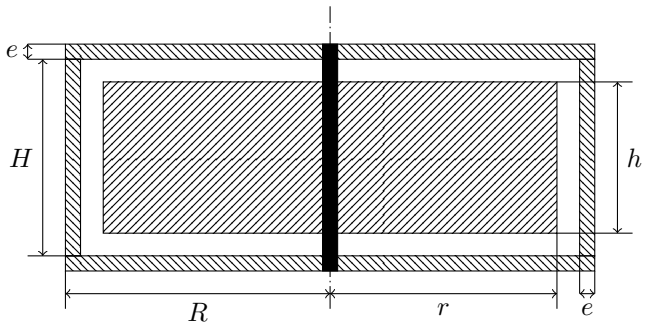


Figure 8 Géométrie de la roue de réaction : le guidage en rotation et la motorisation ne sont pas représentés, et les proportions ne sont pas respectées

Q 12. Montrer que la masse totale de la roue de réaction (guidage et motorisation exclus) peut s'écrire à l'ordre 1 en e et j comme :

$$m_t = \frac{2I_a}{r^2} + 2\pi\rho_c e r(r + H)$$

On rappelle que le moment d'inertie I_{ac} d'un cylindre plein, de masse m_C et de rayon r_C, par rapport à son axe est $I_{ac} = \frac{1}{2} m_C r_C^2$.

Q 13. Montrer que cette masse totale m_t est minimale pour une valeur spécifique de r que l'on déterminera à l'aide de l'abaque donnée **figure A** du document réponse. Calculer la masse m_t ainsi que les dimensions h et R des différents composants de la roue de réaction.

La technologie de moteur à courant continu utilisée pour piloter la roue de réaction impose que la vitesse de rotation ne peut excéder 2800 tr · min^{-1}. Par ailleurs, la vitesse de rotation doit être telle que les actions liées aux effets centrifuges dans la roue ne causent pas la rupture du matériau ; par sécurité, on impose que la contrainte maximale dans la roue ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau :

$$\sigma = \frac{7}{16}\rho_r \omega_r^2 r^2 \leqslant \sigma_e$$

Q 14. Quelle est, en définitive, la vitesse de rotation maximale (en tr · min^{-1}) à laquelle pourra tourner la roue de réaction ? En déduire, à l'aide du cahier des charges de la **figure 7**, le couple moteur $C_m(t)$ maximal autorisé, ce qui permettra au final de choisir le moteur le plus adapté pour piloter la roue de réaction.

BY-NC-SA

III Contrôle d'attitude du satellite

Objectif

L'objectif de cette partie est de mettre en place une loi de commande permettant d'asservir les positions angulaires du satellite à des positions de référence. Dans les parties **III.A**, **III.B** et **III.C**, il s'agira de déterminer le régulateur qui assure les performances de la chaîne d'asservissement. Dans la partie **III.D**, il s'agira de vérifier si la loi de commande déterminée permet de respecter les contraintes imposées à l'actionneur : couple maximal et vitesse maximale qu'il peut réaliser. Dans le cas général, les lois de commande développées nécessitent une approche multivariable (trois axes), le cadre de ce sujet se restreint uniquement aux mouvements de tangage, soit à la rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{y}$. Les modèles utilisés ont été établis en adoptant $\psi = \phi = 0$.

On rappelle que dans le mode de fonctionnement pointage fin (MNO) seuls les actionneurs par roues de réaction et les magnétocoupleurs sont utilisés. Le cahier des charges partiel portant sur l'asservissement d'attitude est détaillé dans le tableau de la **figure 9**. Ce cahier des charges doit être assuré même en cas d'un dépointage initial qui sera modélisé comme condition initiale θ_0 sur l'angle de tangage θ. La consigne d'angle est notée θ_{ref}.

Chaîne d'asservissement	Écart de pointage (en régime permanent)	$\lvert\Delta\theta\rvert = \lvert\theta_{\text{ref}} - \theta\rvert \leqslant 0{,}04°$
	Pulsation de coupure ω_c à 0 dB	$0{,}13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
	Marges de phase et de gain	$M\phi \geqslant 30°$
		$MG \geqslant 6$ dB
	Vitesse angulaire du satellite	$\lvert\dot{\theta}\rvert \geqslant 0{,}15° \cdot \text{s}^{-1}$
Actionneur à roue de réaction	Couple maximal	$\lvert C\rvert_{max} \leqslant 0{,}005 \text{ N} \cdot \text{m}$
	Vitesse maximale	$\lvert\Omega\rvert_{max} \leqslant 2800 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$
Magnétocoupleurs	Couple maximal	$\lvert C\rvert_{max} \leqslant 0{,}0005 \text{ N} \cdot \text{m}$
Dépointage initial	Valeur maximale	$\lvert\Theta_0\rvert \leqslant 20°$

Figure 9 Cahier des charges pour la chaîne d'asservissement

L'architecture de contrôle d'attitude du satellite est représentée sur la **figure 10**. Dans le cas général, la loi de commande utilise la mesure de la position angulaire du satellite et une estimation de sa vitesse. Dans le mode de pointage fin, les actionneurs sont les roues de réaction qui fournissent un couple C_{roue} conformément à un couple de consigne $C_{\text{piloté}}$ demandé par la loi de commande. Le satellite est aussi soumis :

- à des couples perturbateurs sinusoïdaux de pulsations ω_0 et $2\omega_0$ (avec $\omega_0 = 0{,}001 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et d'amplitude, dans le pire des cas, de $30 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$;
- à un couple constant d'amplitude $1 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$.

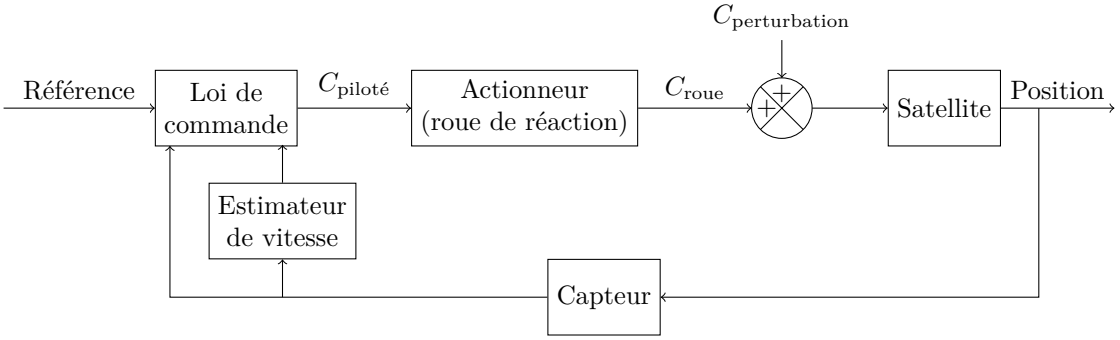


Figure 10 Architecture du système SCAO

Dans tous les modèles utilisés dans la suite, les angles sont exprimés en radians.

III.A – Choix d'un modèle de commande et analyses préliminaires

La **figure 11** montre la chaîne de régulation (monoaxe) où $H(p)$, $A(p)$ et $B(p)$ sont les fonctions de transfert modélisant respectivement le satellite, la roue de réaction et le capteur. On suppose dans un premier temps que l'actionneur et le capteur ont tous deux un gain statique unitaire mais sont affectés d'un retard pur : 100 ms pour la roue de réaction et 700 ms pour les capteurs stellaires. La fonction de transfert du satellite est obtenue à partir des relations obtenues à la **question 8** ; et au regard de la bande passante souhaitée, on admettra qu'elle peut être approchée par la fonction $H(p)$ donnée ci-dessous. Ainsi, les fonctions de transfert correspondant aux différents éléments de la chaîne d'asservissement sont :

BY-NC-SA

$$H(p) = \frac{0{,}028}{p^2} \qquad A(p) = A_r(p)\, e^{-0{,}1p} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{0{,}87}p} e^{-0{,}1p} \qquad B(p) = e^{-0{,}7p}$$

Enfin, le correcteur représenté par la fonction de transfert $C(p) = R(p)\, F(p)$ est le produit de deux termes :

- $R(p)$ correspond à un régulateur de type PID (proportionnel, intégral, dérivé), qu'il s'agira de déterminer dans la suite ;
- $F(p)$ est la fonction de transfert d'un filtre de type passe-bas. Il a comme objectif de réduire le gain du système en haute fréquence afin de ne pas exciter les modes oscillants (l'analyse de l'influence de ces modes est hors du cadre de cette étude). Cette fonction de transfert sera approchée par la forme suivante $F(p) = \dfrac{1}{1 + 1{,}5p}$ (en pratique, ces filtres sont d'ordre 2).

Q 15. La **figure B** du document réponse donne le diagramme de Bode de la fonction $A_r(p)H(p)F(p)$. Tracer directement sur cette figure les diagrammes asymptotiques associés à cette fonction (document réponse à rendre avec la copie).

Q 16. En prenant $R(p) = 1$, préciser la fonction de transfert en boucle ouverte et tracer les diagrammes de Bode réels (5 ou 6 points judicieusement choisis suffisent pour ces tracés) sur la **figure B**. Au regard des tracés effectués, justifier que des corrections proportionnelle ou proportionnelle-intégrale ne permettent pas d'assurer le cahier des charges escompté.

Q 17. En déduire les conditions sur le module et l'argument de $R(j\omega)$ pour assurer la pulsation de coupure et la marge de phase demandées par le cahier des charges associé au modèle nominal.

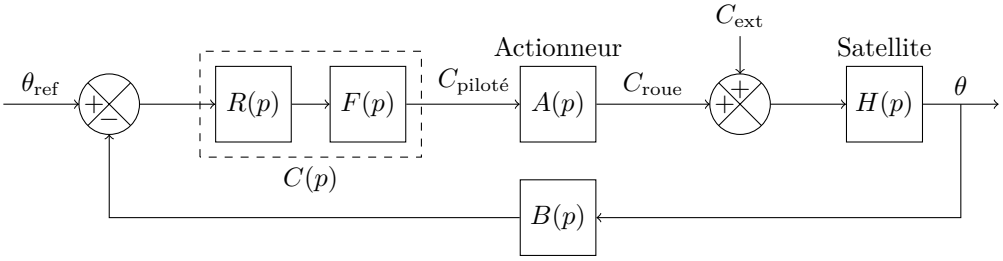


Figure 11 Schéma-bloc de la boucle d'asservissement d'attitude

III.B – Analyse des contraintes sur la loi de commande

L'objet de cette partie est de déterminer les contraintes que doit vérifier le régulateur en vue d'assurer les exigences de précision lorsque le procédé est soumis aux couples perturbateurs sinusoïdaux, c'est-à-dire de la forme $c_{ext} = C_{00}\sin(\omega_0 t)$ et $c_{ext} = C_{01}\sin(2\omega_0 t)$, dont les caractéristiques, amplitude et pulsation, sont données précédemment : $C_{00} = C_{01} = 30 \times 10^{-6}$ N · m et $\omega_0 = 0{,}001$ rad · s^{-1}.

Q 18. En prenant une consigne $\theta_{\text{ref}} = 0$, déterminer la fonction de transfert $T(p) = \dfrac{\theta(p)}{C_{\text{ext}}(p)}$ entre les couples perturbateurs $C_{\text{ext}}(p)$ et la position $\theta(p)$ et l'exprimer à partir des fonctions de transfert de la **figure 11**.

Q 19. En utilisant les approximations fréquentielles $\|T_{bo}(j\omega)\| \gg 1$ et $\|T_{bo}(j\omega)\| \ll 1$, où $T_{bo}(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte, montrer que dans l'intervalle des pulsations des couples perturbateurs, on peut écrire : $\|T(j\omega)\| \approx \dfrac{1}{\|R(j\omega)F(j\omega)A(j\omega)B(j\omega)\|}$. Justifier que cette relation peut encore être simplifiée selon la formulation : $\|T(j\omega)\| \approx \dfrac{1}{\|R(j\omega)\|}$.

Q 20. Donner l'expression de l'amplitude de l'évolution temporelle de $\theta(t)$, en fonction de $\|R(j\omega)\|$, en réponse au couple perturbateur sinusoïdal de pulsation ω_0. En déduire la condition que doit vérifier $\|R(j\omega)\|$ en vue de satisfaire la précision d'écart de pointage, pour une consigne $\theta_{\text{ref}} = 0$, lorsque le satellite est soumis à ce couple perturbateur. Reprendre cette analyse dans le cas du couple perturbateur de pulsation $2\omega_0$.

III.C – Synthèse du régulateur

Pour la synthèse du régulateur $C(p)$, on recherche une solution de la forme :

$$R(p) = K\frac{(1 + \tau p)^2}{p}$$

Q 21. Déterminer la valeur de τ permettant d'obtenir la marge de phase $M\phi = 30°$ exigée par le cahier des charges.

Q 22. En conservant la valeur de τ déterminée précédemment, calculer la valeur du gain K qui assure la pulsation de coupure imposée par le cahier des charges.

BY-NC-SA

Q 23. Vérifier si le régulateur déterminé permet d'assurer les conditions nécessaires à satisfaire les performances, en termes d'écart de l'angle de pointage, lorsque le satellite est soumis aux variations sinusoïdales du couple perturbateur.

III.D – Validation de la loi de commande

Objectif

L'objectif de cette partie est de vérifier que les commandes issues du régulateur précédent ne génèrent pas de contraintes excessives sur l'actionneur, en particulier que la vitesse maximale et le couple maximal restent dans les « limites » de l'actionneur réalisé par la roue de réaction. Cette vérification se fera d'une part vis-à-vis d'un dépointage initial et d'autre part vis-à-vis des différents couples perturbateurs. Enfin, une modification de la loi de commande sera envisagée en vue d'améliorer les performances.

III.D.1) Analyse des performances en cas de dépointage initial

Pour cette analyse, on suppose que les conditions initiales correspondent à un dépointage de 20°, soit $\theta_0 = 20°$, et que la consigne d'attitude est nulle $\theta_{\text{ref}} = 0$. La **figure 12** montre le schéma qui sera utilisé pour cette analyse où la condition initiale θ_0 d'attitude est considérée comme un terme de perturbation constant.

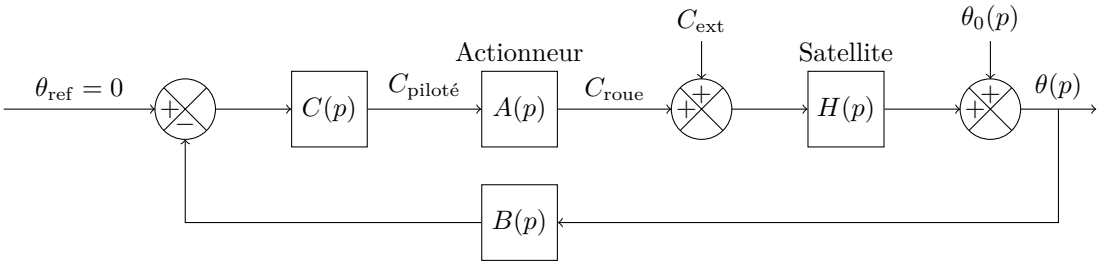


Figure 12 Schéma d'analyse pour la réponse aux conditions initiales

Q 24. Déterminer $T_d(p) = \dfrac{C_{\text{piloté}}(p)}{\theta_0(p)}$ à partir des différentes fonctions de transfert de la figure **12**. On note $c_{pa}(t) = c_{\text{piloté}}(t + \tau_1)$, avec $\tau_1 = 0{,}7$ s. En déduire à partir de $T_d(p)$ l'expression de $\dfrac{C_{pa}(p)}{\theta_0(p)}$.

Q 25. En utilisant le théorème de la valeur initiale, ou toute autre méthode de votre choix, déterminer littéralement et numériquement $c_{pa}(0)$ en réponse à une condition initiale $\theta_0(t) = \Theta_0 \Upsilon(t)$[1] d'amplitude $\Theta_0 = 20°$. En déduire[2] $c_{\text{piloté}}(\tau_1)$.

Q 26. En réponse à une condition initiale $\theta_0(t) = \Theta_0 \Upsilon(t)$ d'amplitude 20°, la **figure 13** montre l'évolution de la vitesse de rotation angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe $\vec{y}$. À partir de la relation obtenue à la **question 10**, déterminer la valeur maximale de la vitesse angulaire de la roue de réaction ω_r. Effectuer l'application numérique pour $I_y = 35{,}7$ kg · m^2, $I_{ry} = 4 \times 10^{-4}$ kg · m^2.

Q 27. Conclure alors sur la capacité de la loi de commande à satisfaire les contraintes imposées par l'actionneur à roue de réaction.

III.D.2) Amélioration des performances vis-à-vis du dépointage initial

On note $\Delta\theta = \theta_{\text{ref}} - \theta$. La loi de commande déterminée précédemment est modifiée en ajoutant une nouvelle fonction. Ainsi, avec la nouvelle architecture envisagée, la régulation se décompose en deux parties :

- pour un écart angulaire $|\Delta\theta| < 0{,}3°$, la régulation se fait en position en utilisant le correcteur $C(p)$ déterminé précédemment ;
- pour un écart angulaire $|\Delta\theta| > 0{,}3°$, le couple demandé à la roue de réaction est donné par $C_{\text{piloté}}(p) = -R_1(p) \cdot (b_v \text{sgn}(\Delta\theta) + p\theta(p))$ où sgn représente la fonction signe. L'objet de cette phase de l'étude est de déterminer les paramètres de la nouvelle fonction. La synthèse de la fonction de transfert $R_1(p)$ et la gestion de la commutation entre les deux parties de la loi de commande est hors du cadre de cette étude.

Q 28. Justifier que pour $|\Delta\theta| > 0{,}3°$, la deuxième composante de la loi de commande est une régulation de vitesse avec une consigne de vitesse $\dot{\theta}_c$ constante.

Q 29. En utilisant la relation obtenue à la **question 10**, déterminer la valeur maximale $|\dot{\theta}_c|_{\max}$ (en $° \cdot \text{s}^{-1}$) de la consigne de vitesse $\dot{\theta}_c(t)$ que l'on peut imposer. Effectuer l'application numérique pour $I_y = 35{,}7$ kg · m^2, $I_{ry} = 4 \times 10^{-4}$ kg · m^2 et une vitesse maximale de la roue de 2800 tr · min^{-1} (correspondant à la vitesse maximale de l'actionneur donnée par le tableau de la **figure 9**).

[1] $\Upsilon(t)$ désigne l'échelon d'Heaviside d'amplitude 1

[2] On admettra que la valeur déterminée est proche de la valeur maximale (en valeur absolue) de celle obtenue pour des cas d'utilisation de filtres $F(p)$ d'ordre supérieur à 1

BY-NC-SA

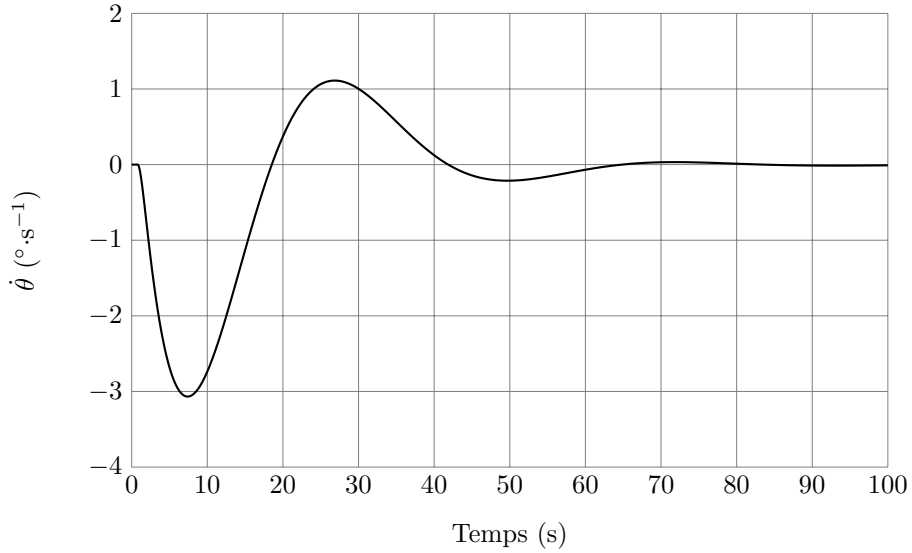


Figure 13 Évolution de la vitesse de rotation du satellite $\dot{\theta}$ (°·s^{-1}) en réponse à un dépointage initial de 20°

Q 30. La **figure 14** montre les réponses obtenues[3] avec la loi de commande définie précédemment pour un dépointage initial $\Theta_0 = 20°$. Commenter les réponses obtenues et conclure alors sur la capacité de la nouvelle loi de commande à satisfaire l'ensemble des contraintes imposées par le cahier des charges.

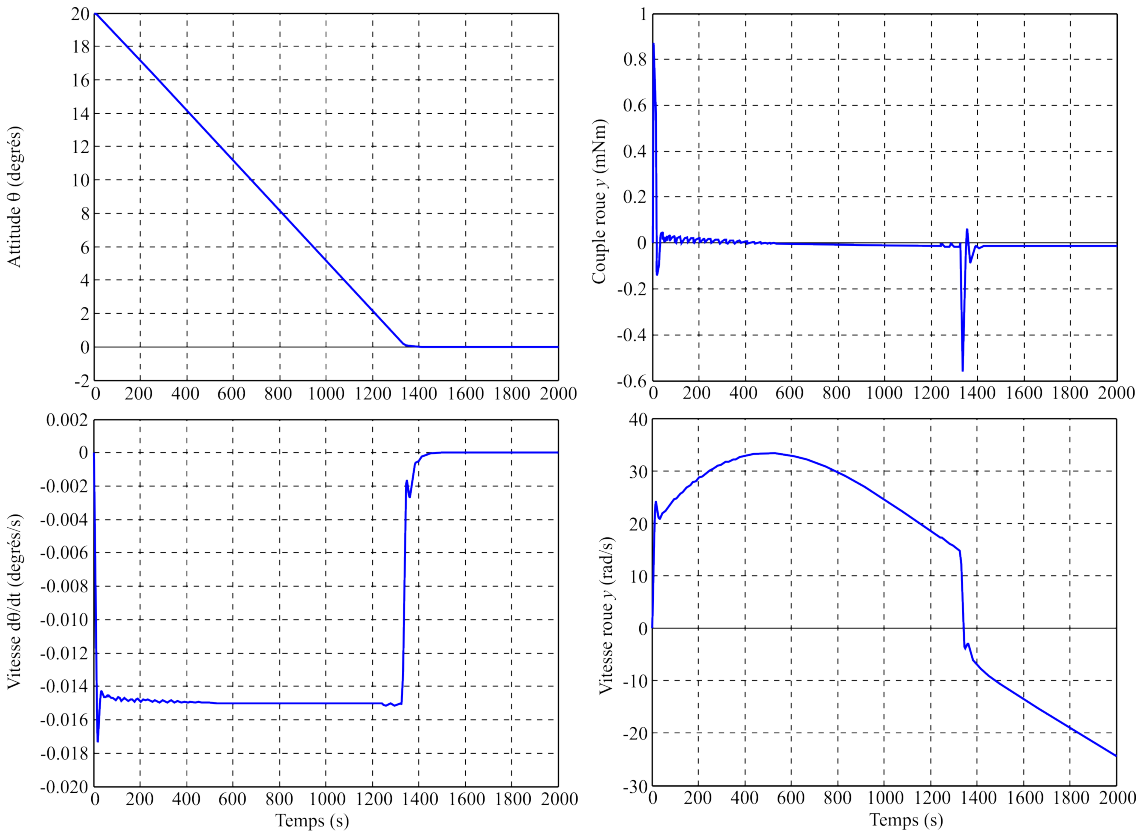


Figure 14 Évolutions temporelles à partir d'une condition initiale (dépointage) $\theta_0 = 20°$

III.D.3) Analyse des performances vis-à-vis d'un couple perturbateur constant

L'objet de cette partie est d'analyser les performances de la loi de commande lorsque le satellite est soumis à un couple extérieur constant, $C_{\text{ext}} = C_0 \Upsilon(t)$ d'amplitude $C_0 = 10^{-6}$ N · m.

Q 31. Sans calcul, mais en justifiant votre réponse, préciser l'écart en régime permanent en réponse à un couple perturbateur constant.

Q 32. À partir du schéma de la figure **11**, déterminer la valeur du couple appliqué C_{roue} en régime permanent en réponse au couple perturbateur $C_{\text{ext}}(t)$ supposé constant et en déduire la loi temporelle d'évolution de la vitesse de la roue. Quelle est la conséquence sur le fonctionnement de l'actionneur du couple perturbateur ?

[3] En utilisant un simulateur trois axes comportant en particulier les modes oscillants dus aux souplesses de la structure

BY-NC-SA

Justifier le terme de « saturation » pour décrire ce phénomène. À partir de quel horizon temporel survient cette situation ?

Pour remédier au problème de saturation, on utilise des bobines magnétiques, appelées magnétocoupleurs, qui permettent de créer des moments adaptés grâce à l'action du champ magnétique terrestre. Le satellite est équipé de trois magnétocoupleurs orientés respectivement selon les trois directions $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ du satellite, et dont on peut commander précisément les moments magnétiques respectifs $\vec{\mathcal{M}}_x = \mathcal{M}_x\vec{x}$, $\vec{\mathcal{M}}_y = \mathcal{M}_y\vec{y}$ et $\vec{\mathcal{M}}_z = \mathcal{M}_z\vec{z}$. Dans le cas d'une orbite polaire, le champ magnétique terrestre a pour expression $\vec{B} = B_0\cos(\omega_0 t)\vec{x} + 2B_0\sin(\omega_0 t)\vec{z}$. L'interaction entre les magnétocoupleurs et le champ magnétique terrestre se traduit par un moment (mécanique) dont l'expression au centre d'inertie G du satellite est :

$$\vec{M}_G(\text{magnétique}) = B_0\Big(2\mathcal{M}_y\sin(\omega_0 t)\vec{x} + \big(\mathcal{M}_z\cos(\omega_0 t) - 2\mathcal{M}_x\sin(\omega_0 t)\big)\vec{y} - \mathcal{M}_y\cos(\omega_0 t)\vec{z}\Big)$$

Q 33. Expliquer comment les magnétocoupleurs peuvent permettre de résoudre le problème de saturation des roues de réaction : on détaillera précisément quel est le rôle de chacun des trois magnétocoupleurs et à quels instants de l'orbite du satellite leurs effets sont les plus sensibles.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

21 février 2012 17:29

Ne rien écrire dans la partie barrée

2011-045-DR

Concours Centrale-Supélec 2012

NOM : _____ PRÉNOMS : _____

Signature :

Composition de **S2I** Filière **PSI**

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir rempli complètement cet en-tête

NUMÉRO DE PLACE

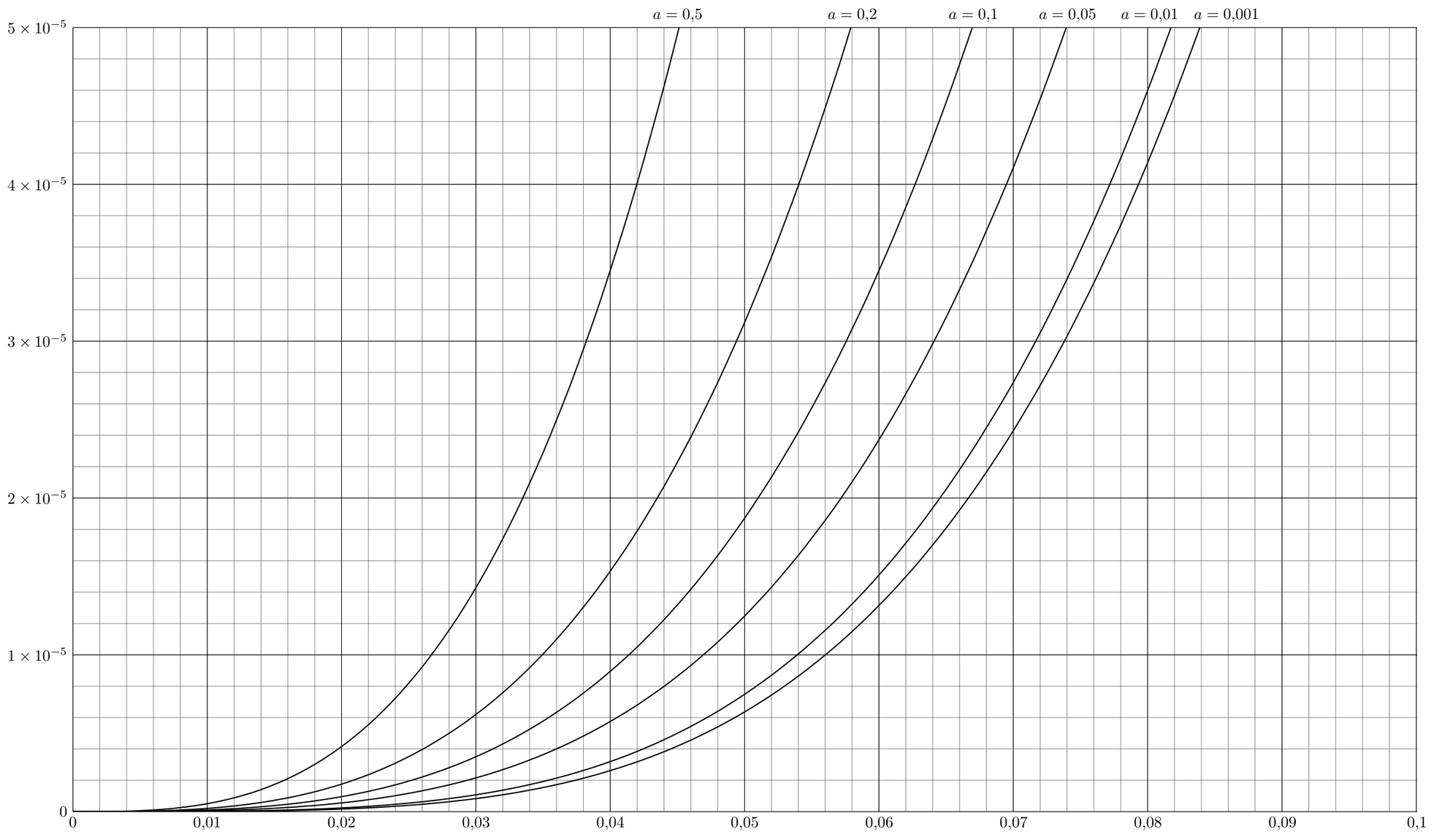


Figure A Tracés de $y = x^4 + ax^3$ pour différentes valeurs de a (unités SI)

Ne rien écrire dans la partie barrée
21 février 2012 17:29
2011-045-DR

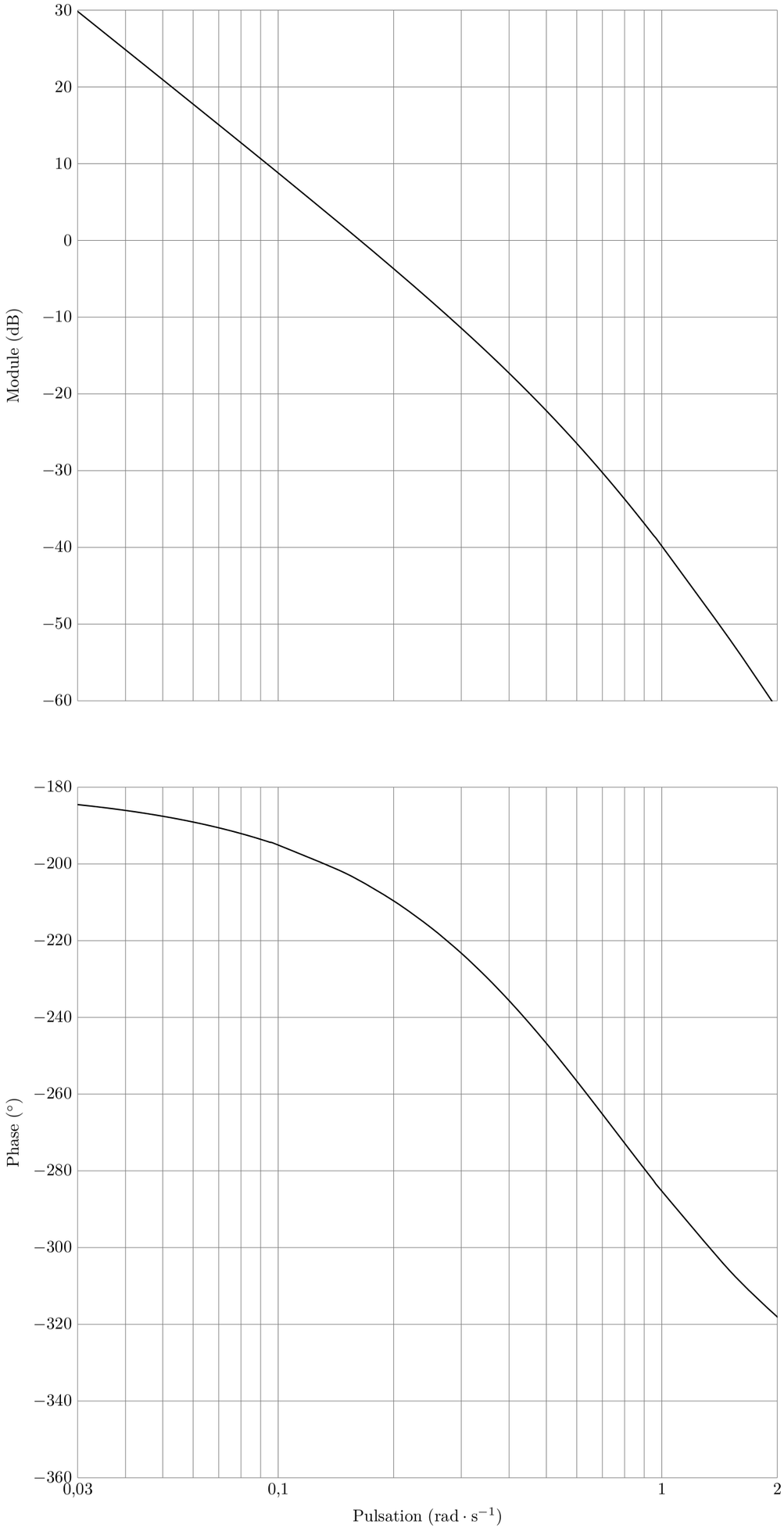


Figure B Diagramme de Bode de la fonction $A_r(p)H(p)F(p)$

Ne rien écrire dans la partie barrée
21 février 2012 17:29
2011-045-DR

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens
- Simplification d'un modèle : linéarisation, non-linéarités, pôles dominants, validité
- Correction des systèmes asservis : correcteurs P, PI et à avance de phase
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi