Concours Centrale-Supélec, France

Session 2015, filière PSI

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude d'une suite récurrente
- Partie II : formule de Wald
- Partie III : processus de Galton-Watson
- Partie IV : un exemple
- Partie V : cas surcritique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2015/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures Calculatrices autorisées

2015

Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire.

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si X est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera G_X, série entière de rayon de convergence au moins 1, la fonction génératrice de X. On rappelle que la fonction génératrice de X est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [-1,1] \qquad G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n$$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Plus précisément, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si (a_n) est une suite de réels positifs tels que, pour tout $t \in [0,1[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X=n)$.

On admettra le théorème suivant (lemme de Cesaro) : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels convergente vers l et si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, alors la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers l.

I Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1)=1$, $f'(0)<1$ et $f''(1)>0$.

On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On pose $m = f'(1)$.

I.A –

I.A.1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note l sa limite.

I.A.2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f.

I.A.3) Montrer que $l = x_f$.

I.B – On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in [0,1[$.

I.C – On suppose maintenant $m \leqslant 1$. Montrer que $x_f = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.

I.D – Dans cette question, on suppose $m = 1$.

I.D.1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \dfrac{1}{\varepsilon_n}\right) = \dfrac{f''(1)}{2}$.

I.D.2) En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim \dfrac{2}{f''(1)n}$.

On pourra utiliser le lemme de Cesaro admis en préambule.

I.E – On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

I.E.1) Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$.

I.E.2) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n \sim cm^n$.

II Formule de Wald

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. $(T, X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis, $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

CC BY-NC-SA

II.A – On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

II.A.1) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

II.A.2) En admettant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est indépendante de X_{k+1}, prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = (G_X)^k$.

II.A.3) En admettant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T et S_n sont indépendantes, montrer que

$$\forall t \in [0,1[, \forall K \in \mathbb{N} \qquad G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right)$$

II.A.4) Pour $K \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1[$, on pose $R_K = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right)$.

Montrer que $0 \leqslant R_K \leqslant \dfrac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{\infty} P(T=k)$.

II.A.5) Conclure.

II.B – En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $E(S) = E(T)E(X_1)$.

II.C – Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'œufs suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite, la probabilité qu'un œuf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0,1[$.

II.C.1) Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

II.C.2) En utilisant la relation de composition ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

III Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité caractérisée par la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombre réels entre 0 et 1 telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Dire qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit la loi μ signifie que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = p_k$.

On suppose que $p_0 + p_1 < 1$ (ce qui signifie qu'il existe au moins un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k \neq 0$).

On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ indépendantes qui suivent toutes la loi μ, on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

Y_n représente le nombre d'individus à la génération n.

S'il n'y a pas d'individu à la génération n, il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du $i$ème élément de la génération n est égal à $X_{n,i}$.

On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.

On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et, pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n.

On a donc en particulier, pour $t \in [0,1]$, $\varphi_0(t) = t$.

On suppose que toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance égale à m et une variance.

III.A – Probabilité d'extinction

III.A.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.

III.A.2) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n.

III.A.3)

a) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $\left(\varphi_n(0)\right)_{n\geqslant 0}$.

b) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie I à la suite $\left(\varphi_n(0)\right)_{n\geqslant 0}$.

III.A.4) Si $m \leqslant 1$, montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

BY-NC-SA

On définit alors le temps T d'extinction par :

$$\omega \in \Omega \quad \begin{cases} T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ T(\omega) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admettra que T est une variable aléatoire.

III.B – Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question que $m < 1$.

III.B.1) Vérifier que T admet une espérance.

III.B.2)

a) Montrer que, pour tout entier n, $P(Y_n \geqslant 1) \leqslant m^n$.

b) Montrer que $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

c) En déduire une majoration de $E(T)$.

III.C – Étude de la lignée

Dans cette question, on suppose $m \leqslant 1$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n$.

On admettra que Z est une variable aléatoire définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{Y_k = 0\}$.

III.C.1) Montrer que Z est définie sur un ensemble de probabilité 1.

III.C.2)

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(P(Z_n \leqslant k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(P(Z_n = k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $P(Z = k)$.

c) Montrer que, pour tout $s \in [0, 1[$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leqslant \sum_{k=0}^{K} |P(Z_n = k) - P(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$$

d) En déduire que la suite de fonctions (G_{Z_n}) converge simplement vers G_Z sur $[0, 1]$.

III.C.3)

a) Exprimer G_{Z_1} en fonction de f.

b) On admet que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$.
En déduire que, pour tout $s \in [0, 1[$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

c) Montrer que Z est d'espérance finie si et seulement si $m < 1$. Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

IV Un exemple

On suppose dans cette partie que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$.

IV.A – Exprimer, pour $t \in [0, 1]$, $f(t)$ et calculer m.

IV.B – Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1[$, $\varphi_n(t) \neq 1$.

On peut donc poser, $a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1}$.

IV.C – Montrer que, pour $t \in [0, 1[$, la suite $\left(a_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

IV.D – En déduire que, pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \frac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}$.

IV.E – Exprimer, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $P(Y_n = k)$ en fonction de n et k.

IV.F – Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement $T > n$.
La variable T admet-elle une espérance ?

IV.G – Exprimer, pour $s \in [0, 1[$, $G_Z(s)$ en fonction de s.
En déduire la loi de Z.

BY-NC-SA

V Cas surcritique

On suppose dans cette partie $m > 1$.

On étudie un problème légèrement différent : k étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'il y a k individus à la génération 0 ; ensuite tout se passe comme précédemment.

On note W_n le nombre d'individus à la $n$ième génération et on définit u_n la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la première fois au rang n :

$$u_n = P\left((W_n = k) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k)\right)\right)$$

Pour n et r entiers naturels non nuls, on définit de même $u_n^{(r)}$ comme la probabilité pour que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k pour la $r$ième fois au rang n.

V.A – Vérifier que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n s^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(r)} s^n$ convergent quand $s \in [-1, 1]$.

On peut donc définir, pour $s \in [-1, 1]$, $U(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n s^n$ et $U_r(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(r)} s^n$.

V.B –

V.B.1) Montrer que $P(W_1 > k) > 0$.

V.B.2) Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur k est non nulle ; on note u cette probabilité.

On pourra étudier séparément les cas $p_0 = 0$ et $p_0 > 0$.

V.C –

V.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer la relation

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

V.C.2) En déduire que, pour tout entier r strictement positif, $U_r = U^r$ (U^r désigne $U \times U \times \cdots \times U$ r fois).

V.D –

V.D.1) Montrer que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

V.D.2) Montrer qu'il en est de même pour la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

V.E – Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements tous de probabilité 1.

Montrer que $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$. Qu'en déduit-on pour $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$?

V.F – Soit α la probabilité qu'il y ait extinction et β la probabilité que la suite (Y_n) diverge vers l'infini.

Montrer que $\alpha + \beta = 1$.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites récurrentes
- Dérivabilité et convexité
- Séries numériques et vectorielles
- Variables aléatoires discrètes
- Séries entières
- Espaces probabilisés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi