Concours Centrale-Supélec, France

Session 2015, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : résultats préliminaires
- Partie II : quelques exemples d'applications harmoniques
- Partie III : problème de Dirichlet sur le disque unité de R^2
- Partie IV : retour sur les polynômes harmoniques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2015/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PSI — 2015

4 heures — Calculatrices autorisées

Le problème de Dirichlet est un problème aux limites bien connu en théorie du potentiel, en particulier lorsqu'on est en présence d'une symétrie de révolution.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étant donnée une succession continue de valeurs sur un contour fermé (en particulier sur le cercle trigonométrique), il s'agit de déterminer une fonction (par exemple un potentiel en physique) *harmonique* à l'intérieur du domaine délimité par ce contour et coïncidant avec les valeurs données sur le contour. Dans le cas particulier où l'on a des valeurs polynomiales sur le contour fermé, on obtient comme solution un *polynôme harmonique*.

Les applications physiques liées à ce type de problème aux limites sont nombreuses, par exemple en géophysique, en physique quantique et en cristallographie.

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|\cdot\|_2$ définie par $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
- Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, la notation $D((x,y),r)$ (respectivement $\bar{D}((x,y),r)$) désigne le disque ouvert de centre (x,y) et de rayon r (respectivement le disque fermé de centre (x,y) et de rayon r). En particulier la notation $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
  On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Si f est une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$, $f:\left|\begin{array}{ccc}\Omega&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&f(x,y)\end{array}\right.$, $\partial_1 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (respectivement $\partial_2 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) est la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
  Si f est de classe C^2, $\partial_{11} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (respectivement $\partial_{22} f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) est la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
- Si $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur l'ouvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l'application Δu définie par $\Delta u:\left|\begin{array}{ccc}\Omega&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\partial_{11}u(x,y)+\partial_{22}u(x,y)\end{array}\right.$
- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une application $v:\Omega\to\mathbb{R}$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta v(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.
- On appelle fonction polynomiale des deux variables x et y sur $\mathbb{R}^2$ (ou plus simplement polynôme de deux variables, ou encore polynôme quand il n'y a pas de confusion possible) toute application de la forme

$$P:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\displaystyle\sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N}\\k+l\leqslant n}}\alpha_{kl}\,x^k y^l\end{array}\right.$$

  où n est un entier naturel fixé et les $(\alpha_{kl})_{0\leqslant k,l\leqslant n}$ sont des coefficients réels.
  Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls ; son degré est par convention $-\infty$.
  De plus, pour tout polynôme P non nul, le degré de P est l'entier naturel $d(P)$ défini par $d(P)=\max\{k+l/\ \alpha_{kl}\neq 0\}$.
  On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à deux variables et pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à m. On admettra dans tout le problème que $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\mathcal{P}_m$ $(m\in\mathbb{N})$ en est un sous-espace vectoriel.
  Enfin, un polynôme est dit harmonique s'il définit en plus une application harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Objectifs

Dans la partie I, on donne quelques propriétés simples des polynômes et des polynômes harmoniques.

La partie II étudie certaines applications harmoniques ; les résultats obtenus seront utilisés dans la partie III.

La partie III s'intéresse au problème de Dirichlet sur le disque unité, puis la partie IV se focalise sur le problème de Dirichlet dans le cas où la condition au bord est polynomiale. On détermine pour finir la dimension de sous-espaces vectoriels de polynômes harmoniques.

BY-NC-SA

I Résultats préliminaires

I.A – Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et P un polynôme de deux variables, tel que $P(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.

I.A.1)

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\Omega$, l'ouvert Ω contient un sous-ensemble de la forme $I\times J$, où I et J sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ contenant respectivement x et y.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

b) En déduire que P est le polynôme nul.

On pourra se ramener à étudier des fonctions polynomiales d'une variable.

I.A.2) Ce résultat subsiste-t-il si l'ensemble Ω admet une infinité d'éléments mais n'est pas supposé ouvert ?

I.B –

I.B.1) Soit $m\in\mathbb{N}$. Justifier que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$ est de dimension finie et déterminer sa dimension.

I.B.2) Déterminer un polynôme harmonique de degré 1, puis de degré 2.

I.B.3)

a) Montrer que l'ensemble des polynômes harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

b) Pour tout $m\geqslant 2$, on note Δ_m la restriction de Δ à $\mathcal{P}_m$. Montrer que $\dim(\ker\Delta_m)\geqslant 2m+1$.

c) Que peut-on déduire pour la dimension de l'espace vectoriel des polynômes harmoniques ?

I.C – Déterminer, dans chacun des cas suivants, un polynôme harmonique H qui vérifie $H(x,y)=f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in C(0,1)$:

I.C.1) $f(x,y)=xy$;

I.C.2) $f(x,y)=x^4-y^4$.

II Quelques exemples d'applications harmoniques

Soit Ω un sous-ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On définit, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et tout couple $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$:

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda}=\{\lambda(x,y)+(x_0,y_0)\mid(x,y)\in\Omega\}$$

II.A – On prend pour Ω (uniquement dans cette question) l'intérieur du triangle équilatéral de sommets $(1,0)$, $(-1/2,\sqrt{3}/2)$ et $(-1/2,-\sqrt{3}/2)$. Faire un dessin sur lequel apparaissent Ω et $\Omega_{2,1,1/2}$.

II.B – Soient $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ fixés.

II.B.1) Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application harmonique de classe C^2 telle que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe C^2 sur Ω. Montrer que les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω.

II.B.2) Par quelle(s) transformation(s) géométrique(s) l'ensemble $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est-il l'image de Ω ? Justifier que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.B.3) Soit $g:\Omega_{x_0,y_0,\lambda}\to\mathbb{R}$ une application harmonique.

Montrer que l'application $(x,y)\mapsto g(\lambda(x,y)+(x_0,y_0))$ est harmonique sur Ω.

II.C –

II.C.1) Montrer que les applications

$$h_1:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\ln(x^2+y^2)\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad h_2:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\dfrac{x}{x^2+y^2}\end{array}\right.$$

sont harmoniques.

II.C.2) En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application $(x,y)\mapsto\dfrac{1-((x+\cos t)^2+(y+\sin t)^2)}{x^2+y^2}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

II.D – ***Un exemple fondamental***

Pour $(x,y)\in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z=x+iy$ et on pose pour t réel (quand l'expression a un sens) :

$$\mathrm{N}(x,y,t)=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}=\frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}$$

BY-NC-SA

II.D.1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$\mathrm{N}_t : \left| \begin{array}{ccc} D(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{N}(x,y,t) \end{array} \right.$$

est harmonique.

On pourra utiliser la question II.B.3.

II.D.2) Dans la suite de cette partie, le couple (x,y) est fixé dans $D(0,1)$.

Montrer que $t \mapsto \mathrm{N}(x,y,t)$ est définie et continue sur $[0,2\pi]$.

II.D.3) Soit $t \in [0,2\pi]$ fixé. Déterminer deux nombres complexes α et β, indépendants de t et de z, tels que

$$\mathrm{N}(x,y,t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

II.D.4) En déduire que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(x,y,t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On pourra écrire $\dfrac{1}{1 - ze^{-it}}$ sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

III Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$.

Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

On définit en outre, en reprenant les notations de la partie II, l'application

$$\mathrm{N}_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(x,y,t) f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

sur $D(0,1)$ et l'application

$$u(x,y) = \begin{cases} \mathrm{N}_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$$

sur $\bar{D}(0,1)$.

III.A – Étude de l'application N_f

III.A.1)

a) Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{11}\,\mathrm{N}_f$ d'ordre 2 par rapport à x.

De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite.

Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{ij}\,\mathrm{N}_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{ij}\,\mathrm{N}(x,y,t)$.

b) En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

III.A.2) Dans cette question, on fixe $t_0 \in [0,2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi] \mid \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta\}$$

a) Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

b) Montrer, en utilisant l'application f, l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{t \in I_0^\delta} \mathrm{N}(x,y,t)\big(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \delta/2$, alors

$$|\,\mathrm{N}(x,y,t)| \leqslant 4\frac{1 - (x^2+y^2)}{\delta^2}$$

BY-NC-SA

d) Déduire de la question précédente que, pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y)-(\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leqslant \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} \mathrm{N}(x,y,t)(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0))\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

III.A.3) Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Qu'en conclut-on pour l'application u ?

III.B – Dans cette sous-partie, on suppose que f est l'application nulle sur $C(0,1)$ et que u est un élément de $\mathcal{D}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$u_n : \left| \begin{array}{ccc} \bar{D}(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & u(x,y) + \frac{1}{n}(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

III.B.1) Supposons que u_n admette un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D(0,1)$.

a) En s'intéressant au comportement de la fonction $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ montrer que, dans ce cas, $\partial_{11} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant 0$.

De même, on peut montrer que $\partial_{22} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant 0$. *Ainsi* $\Delta u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant 0$. *Ce résultat est admis pour la suite.*

b) En déduire que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0,1)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, $u_n(x,y) \leqslant 1/n$.

III.B.3) Montrer que u est identiquement nulle sur $\bar{D}(0,1)$.

III.C – Prouver que, pour toute application continue $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ admet exactement un élément.

IV Retour sur les polynômes harmoniques

IV.A – Dans cette question, m est un entier supérieur ou égal à 2. On considère un polynôme $P \in \mathcal{P}_m$ et on note P_C la restriction de P au cercle $C(0,1)$.

IV.A.1) Montrer que l'application

$$\phi_{m-2} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{m-2} & \to & \mathcal{P} \\ Q & \mapsto & \Delta \tilde{Q} \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \tilde{Q}(x,y) = (1-x^2-y^2)Q(x,y)$$

est linéaire et injective et que $\operatorname{Im} \phi_{m-2} \subset \mathcal{P}_{m-2}$.

IV.A.2) En déduire qu'il existe un polynôme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $P+(1-x^2-y^2)T$ soit un polynôme harmonique.

IV.A.3) Montrer que l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ est la restriction à $\bar{D}(0,1)$ d'un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

IV.A.4) Expliciter l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ quand le polynôme P est défini par $P(x,y) = x^3$.

IV.B –

IV.B.1) Soit $P \in \mathcal{P}$. Montrer que P se décompose de manière unique sous la forme :

$$P(x,y) = H(x,y) + (1-x^2-y^2)Q(x,y)$$

où H est un polynôme harmonique et $Q \in \mathcal{P}$.

IV.B.2) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{H}_m$ le sous-espace vectoriel des polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à m. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$.

IV.B.3) Déterminer explicitement une base de $\mathcal{H}_3$.

IV.C – Dans cette dernière sous-partie, on se place sur $\mathbb{R}^n$ pour un entier naturel $n \geqslant 3$ et on reprend les notations précédentes, en adaptant les outils au contexte de $\mathbb{R}^n$; en particulier on considère maintenant les applications polynomiales à n variables. On admet que le problème de Dirichlet sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, associé à une fonction continue et définie sur la sphère unité (notée $S_n(0,1)$) $f : S_n(0,1) \to \mathbb{R}$, admet encore une unique solution.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1) Montrer que l'ensemble

$$\{(i_1, i_2, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n \mid i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m\}$$

a pour cardinal $\binom{n+m-1}{m}$. En déduire la dimension de $\mathcal{P}_m$.

IV.C.2) Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$ en fonction de m et de n.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Espaces vectoriels normés
- Suites et séries de fonctions
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi