Concours Centrale-Supélec, France

# Session 2017, filière PSI

## Mathématiques 1

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : premiers résultats
- Partie II : le théorème des grandes déviations

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2017/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

PSI

2017

4 heures Calculatrices autorisées

## *Grandes déviations*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.

La partie **I** est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes **A**, **B**, **C**, toutes trois utilisées dans la partie **II**.

**Notations et rappels**

Soient $X$ une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi de $X$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Si $Y$ est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $E(Y)$ l'espérance de $Y$.

Si $Y$ est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $V(Y)$ la variance de $Y$.

Si $Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège « $Y$ est d'espérance finie » en « $E(Y) < +\infty$ ».

Si $\tau$ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, on dit que $X$ vérifie $(C_\tau)$ si $E\left(\mathrm{e}^{\tau|X|}\right) < +\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante :

$(\mathcal{P})$ pour $Z$ et $Y$ variables aléatoires réelles telles que $0 \leqslant Y \leqslant Z$, $\quad E(Z) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad E(Y) < +\infty$

Étant données deux variables aléatoires $Y$ et $Z$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on dit que $Y$ est *presque surement* égale à $Z$ lorsque $P(Y = Z) = 1$.

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in B$.

# I Premiers résultats

### *I.A – Une classe de variables aléatoires*

**I.A.1)** Soient $U$ et $V$ deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que $V$ n'est pas presque surement nulle. Montrer que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geqslant 0$ et que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ est presque surement nulle.

**I.A.2)**

*a)* On suppose que $X$ est bornée. Justifier que $X$ vérifie $(C_\tau)$ pour tout $\tau$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

*b)* On suppose que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels $t$ tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$ ? Pour ces $t$, donner une expression simple de $E(\mathrm{e}^{tX})$.

*c)* On suppose que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels $t$ tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$ ? Pour ces $t$, donner une expression simple de $E(\mathrm{e}^{tX})$.

**I.A.3)** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. On suppose $E(\mathrm{e}^{aX}) < +\infty$ et $E(\mathrm{e}^{bX}) < +\infty$.

*a)* Montrer $\forall t \in [a, b],\ \mathrm{e}^{tX} \leqslant \mathrm{e}^{aX} + \mathrm{e}^{bX}$. En déduire $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.

Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}; E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty\}$ ?

*b)* Soient $k$ dans $\mathbb{N}$, $t$ dans $]a, b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction $y \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{y^k \mathrm{e}^{ty}}{\mathrm{e}^{ay} + \mathrm{e}^{by}}$.

Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

*c)* Montrer que $E(|X|^k \mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.



CC BY-NC-SA

*d)* On reprend les notations de la question b). Soient $k$ dans $\mathbb{N}$, $c$ et $d$ deux réels tels que $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c,d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ : $\left|\theta_{k,t,a,b}(y)\right| \leqslant M_{k,a,b,c,d}$.

**I.A.4)** Dans cette question, $\tau$ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et $X$ vérifie $(C_\tau)$.

*a)* Montrer que l'ensemble des réels $t$ tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$ est un intervalle $I$ contenant $[-\tau, \tau]$.

Pour $t$ dans $I$, on note $\varphi_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX})$.

*b)* Montrer que si $X(\Omega)$ est fini, $\varphi_X$ est continue sur $I$ et de classe $C^\infty$ sur l'intérieur de $I$.

*c)* On suppose maintenant que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X = x_n)$.

En utilisant les résultats établis à la question I.A.3 et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complètement, montrer que $\varphi_X$ est continue sur $I$ et de classe $C^\infty$ sur l'intérieur de $I$.

*d)* Vérifier que pour $t$ dans l'intérieur de $I$ et $k$ dans $\mathbb{N}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k \mathrm{e}^{tX})$.

*e)* Soit $\psi_X = \dfrac{\varphi_X'}{\varphi_X}$.

Montrer que $\psi_X$ est croissante sur $I$ et que, si $X$ n'est pas presque surement égale à une constante, $\psi_X$ est strictement croissante sur $I$.

### *I.B – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

On suppose que $X$ admet un moment d'ordre 2.

**I.B.1)** Soit $\delta$ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$,

$$P(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

**I.B.2)** Si $u$ et $v$ sont deux nombres réels tels que $u < E(X) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \pi_n = P(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$$

### *I.C – Suites sur-additives*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \geqslant u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note $s$ sa borne supérieure.

**I.C.1)** Soient $m$, $q$ et $r$ des éléments de $\mathbb{N}$. On pose $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels $u_n$ et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs$.

**I.C.2)** On fixe $m$ dans $\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la division euclidienne de $n$ par $m$, montrer qu'il existe un entier $N$ tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

**I.C.3)** Montrer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = s$.

# II Le théorème des grandes déviations

Soit $a$ un nombre réel.

### *II.A – Exposant des grandes déviations*

**II.A.1)** Montrer $P(X \geqslant a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geqslant na) = 0$.

**II.A.2)** Soient $m$ et $n$ dans $\mathbb{N}$.

*a)* Montrer que $S_{m+n} - S_m$ et $S_n$ ont même loi.

*b)* Soit $b$ un nombre réel. Montrer $P(S_{m+n} \geqslant (n+m)b) \geqslant P(S_n \geqslant nb)\, P(S_m \geqslant mb)$.

On suppose dans toute la suite du problème $P(X \geqslant a) > 0$.

**II.A.3)** Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(P(S_n \geqslant na))}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite $\gamma_a$ négative ou nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(S_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $X$ vérifie $(C_\tau)$ pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque surement constante. On suppose également que $a$ est strictement supérieur à $E(X)$.


BY-NC-SA

On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(P(S_n \geqslant na))_{n\geqslant 1}$ converge géométriquement vers 0) puis de déterminer $\gamma_a$.

### *II.B – Majoration des grandes déviations*

L'intervalle $I$ et la fonction $\varphi_X$ sont définis comme dans la question I.A.4.

**II.B.1)** Montrer que, pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et $t$ dans $I \cap \mathbb{R}^+$

$$E\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = (\varphi_X(t))^n, \qquad P(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{\varphi_X(t)^n}{\mathrm{e}^{nta}}$$

**II.B.2)** On définit la fonction $\chi : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{array} \right.$

*a)* Montrer que la fonction $\chi$ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

On note $\eta_a$ la borne inférieure de $\chi$ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

*b)* Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque $t$ tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

*c)* Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\eta_a}$.

En déduire que $\gamma_a < 0$.

*d)* Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels $a$ vérifiant les conditions $P(X \geqslant a) > 0$ et $a > E(X)$ ; puis, pour $a$ vérifiant ces conditions, calculer $\eta_a$.

i. $X$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

ii. $X$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

### *II.C – Le théorème de Cramer*

On suppose ici que la borne inférieure $\eta_a$ de la fonction $\chi$ sur $I \cap \mathbb{R}^+$ est atteinte en un point $\sigma$ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$.

Soient $t$ un nombre réel intérieur à $I$ et tel que $t > \sigma$, $b$ un nombre réel tel que $b > \dfrac{\varphi_X{}'(t)}{\varphi_X(t)}$.

**II.C.1)**

*a)* Calculer $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{\mathrm{e}^{tx}}{E(\mathrm{e}^{tX})} P(X = x)$.

On admet alors (quitte à modifier $(\Omega, \mathcal{A}, P)$)

– qu'il existe une variable aléatoire $X'$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X' = x) = \frac{\mathrm{e}^{tx}}{E(\mathrm{e}^{tX})} P(X = x)$$

– qu'il existe une suite $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la même loi que $X'$.

*b)* Montrer

$$E(X') = \frac{\varphi_X{}'(t)}{\varphi_X(t)}, \qquad E(X') > a$$

**II.C.2)** On admet que, si $n$ dans $\mathbb{N}^*$ et si $f$ est une application de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$E(f(X'_1, ..., X'_n)) = \frac{E(f(X_1, ..., X_n)\,\mathrm{e}^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

*a)* Pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X'_k$. Montrer $P(na \leqslant S'_n \leqslant nb) \leqslant P(S_n \geqslant na)\,\dfrac{\mathrm{e}^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

On pourra introduire l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega)^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } na \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant nb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

*b)* En utilisant les questions I.B.2, II.B.2c et le a) ci-dessus, montrer finalement que $\eta_a = \gamma_a$.


BY-NC-SA

**II.C.3)** Dans cette question on pourra utiliser les résultats du II.B.2d.

*a)* Soit $\alpha$ dans $]0,1/2[$. Pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \left\{k \in \{0,...,n\},\ \left|k - \frac{n}{2}\right| \geqslant \alpha n\right\}, \qquad U_n = \sum_{k\in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(U_n^{1/n}\right)_{n\geqslant 1}$.

*b)* Soit $\lambda$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, $\alpha$ dans $]\lambda,+\infty[$. Pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geqslant \alpha n}} \frac{n^k\lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(T_n^{1/n}\right)_{n\geqslant 1}$.

---

• • • FIN • • •

---


BY-NC-SA

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Variables aléatoires discrètes
- Suites et séries de fonctions
- Nombres réels et suites numériques
- Dérivabilité et convexité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi