Concours Centrale-Supélec, France

Session 2023, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : mise en évidence de la problématique lors d'une marche en ligne droite
- Partie II : élaboration et analyse d'un modèle dynamique de l'exosquelette
- Partie III : conception et analyse de lois de commande de l'exosquelette
- Partie IV : synthèse

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2023/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

S2I

PSI

2023

4 heures

Calculatrice autorisée

Contexte

Dans la volonté de rééducation à la marche des patients partiellement ou totalement paralysés au niveau des membres inférieurs, les exosquelettes de marche offrent une solution de plus en plus envisagée par les structures de soins. Si les technologies existantes permettent des séances de rééducation musculaire efficaces, elles n'offrent pour le moment que peu de possibilités d'amélioration dans la vie quotidienne des patients, du fait de la nécessité de la présence d'un personnel soignant formé à leur utilisation.

Il apparait ainsi qu'une solution permettant une plus grande autonomie des patients, que ce soit pour des séances de rééducation encadrées, ou pour leurs déplacements dans la vie quotidienne serait une grande avancée. Elle permettrait ainsi des fréquences, intensités et durées de séances plus en phase avec la pathologie de la personne équipée, tout en facilitant sa mobilité au quotidien.

Pensé pour minimiser le temps de formation pour le patient et le thérapeute, l'exosquelette Atalante (figure 1), développé par la société Wandercraft a pour volonté d'optimiser les séances de rééducation, et à terme d'aboutir à une solution permettant l'autonomie quasi totale du patient. En effet, ce système permet la verticalisation et des déplacements pouvant s'affranchir de toute dépendance à une tierce personne. De par sa liberté d'utilisation pour le patient, les bénéfices sont importants : possibilité de retours sensoriels, flexibilité de l'entrainement à la marche et à la course ou encore personnalisation des programmes proposés.

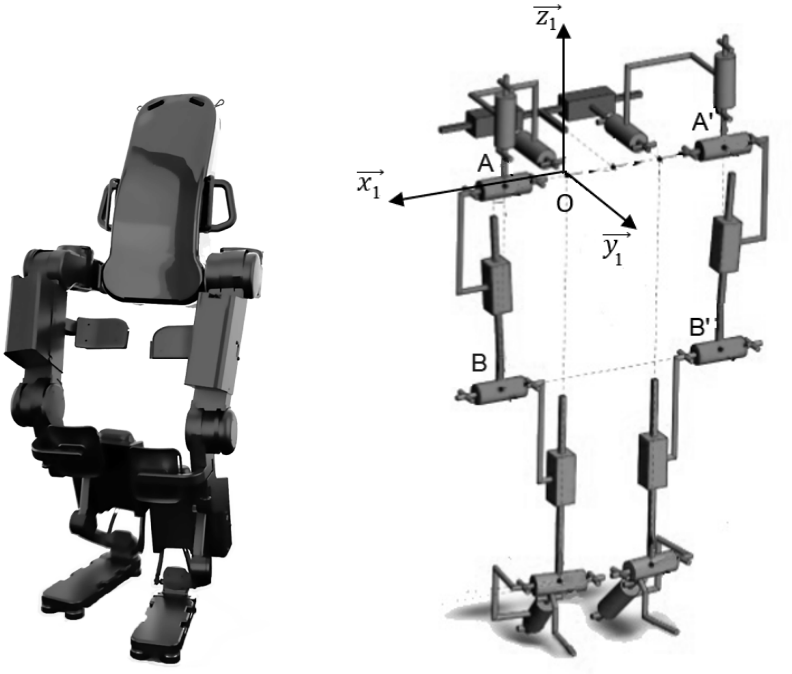


Figure 1 Exosquelette Atalante et modélisation 3D associée

L'architecture de l'exosquelette autorise la complète autonomie des membres supérieurs du patient. De plus, le réglage rapide des dimensions des jambes et des tibias de l'exosquelette et une utilisation intuitive de son paramétrage permettent une utilisation plus aisée. Ainsi, associé avec la possibilité de variation de l'aide apportée par les différents actionneurs, cet équipement est en parfaite adéquation avec l'enchainement des séances de rééducation où les déplacements sont totalement pris en charge, quelles que soient la pathologie et la morphologie du patient.

Les exercices programmés par les thérapeutes s'articulent autour de deux stratégies thérapeutiques différentes, selon le handicap du patient :

— *la proprioception* (sa propre perception) de la verticalité et de la marche pour les patients paraplégiques ou ayant des problèmes d'équilibre ;

— *le renforcement musculaire* pour les patients ayant subi un traumatisme important.

BY-NC-SA

Afin de permettre au patient de reproduire une marche comparable à celle d'un humain valide, et ce quel que soit l'exercice de rééducation préprogrammé, l'exosquelette Atalante possède douze degrés de liberté, six par jambe, et chaque mobilité est contrôlée par un actionneur électrique.

L'ensemble de l'étude menée dans ce sujet se limitera à une marche en ligne droite (figure 3), dans le plan sagittal tel que défini figure 2.

La loi de commande des actionneurs associés aux différentes articulations est donc conditionnée par :

— les trajectoires des différents membres lors de la marche, prédéterminées par un serveur extérieur lors de la prise de mesures du patient ;

— la stabilisation du patient lors de la marche ;

— la rééducation musculaire du patient, selon un protocole dicté par le thérapeute.

Le cahier des charges partiel de l'exosquelette à vérifier dans ce sujet est fourni en annexe A.

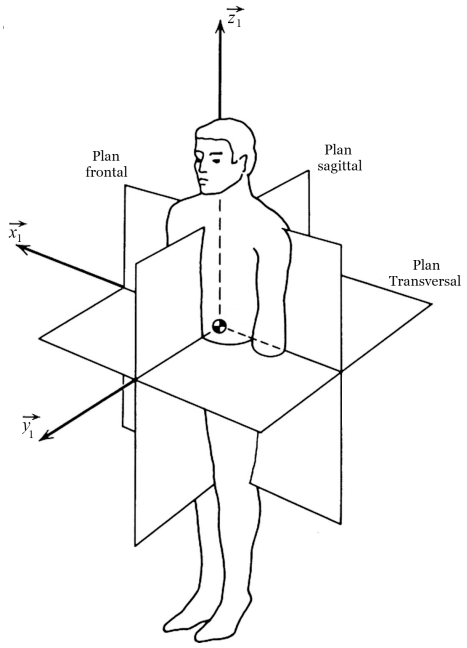


Figure 2 Description des plans d'évolution

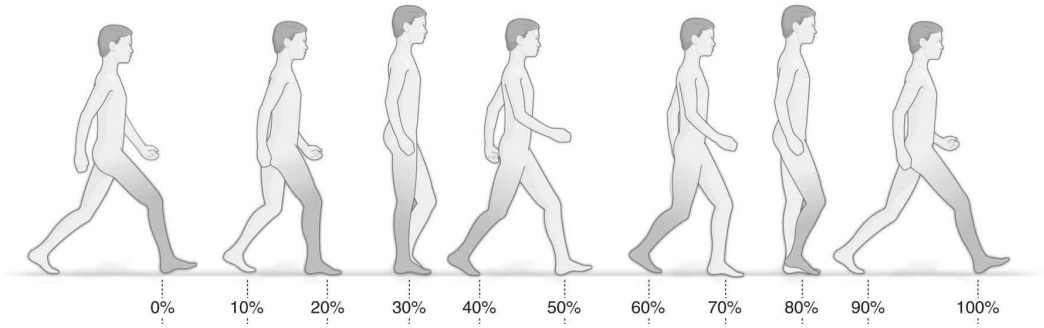


Figure 3 Description d'une foulée en ligne droite

I Mise en évidence de la problématique lors d'une marche en ligne droite

Objectif

Reformuler le cahier des charges global en termes de précision de façon à l'exprimer pour chacun des axes et mettre en évidence la nécessité de la prise en compte du couplage entre les axes dans la synthèse de la loi de commande.

En phase de rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche, il est nécessaire d'éviter la chute du patient. Des essais, menés sur des humains valides, ont permis de mettre en avant que lors d'une marche en ligne droite, une erreur de positionnement du talon de ± 5 mm risque d'amener à un déséquilibre, et donc à une chute (exigence 1.2.1.1, annexe A). Il est donc nécessaire de déterminer l'erreur de positionnement angulaire admissible sur chacun des axes de l'exosquelette pour éviter cette chute.

Dans toute l'étude, les hypothèses et notations seront les suivantes (figure 4) :

— l'étude est menée dans le plan sagittal $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, où $\vec{z}_1$ est vertical ascendant ;

— les différentes caractéristiques de dimension, masse et inertie des différents solides sont précisées annexe B ;

— le buste 1 étant animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, il est considéré comme galiléen ;

— l'étude se limite à la partie de la marche pour laquelle une des deux jambes est totalement décollée du sol (de 70 % à 100 % de la foulée sur la figure 3) ;

— le buste 1 est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec la cuisse 2 ; on note $\theta_1 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$;

— l'ensemble {pied+tibia} 3, considéré comme solidaire, est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{x}_1)$ avec la cuisse 2 ; on note $\theta_2 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$;

— les liaisons décrites précédemment sont supposées parfaites.

BY-NC-SA

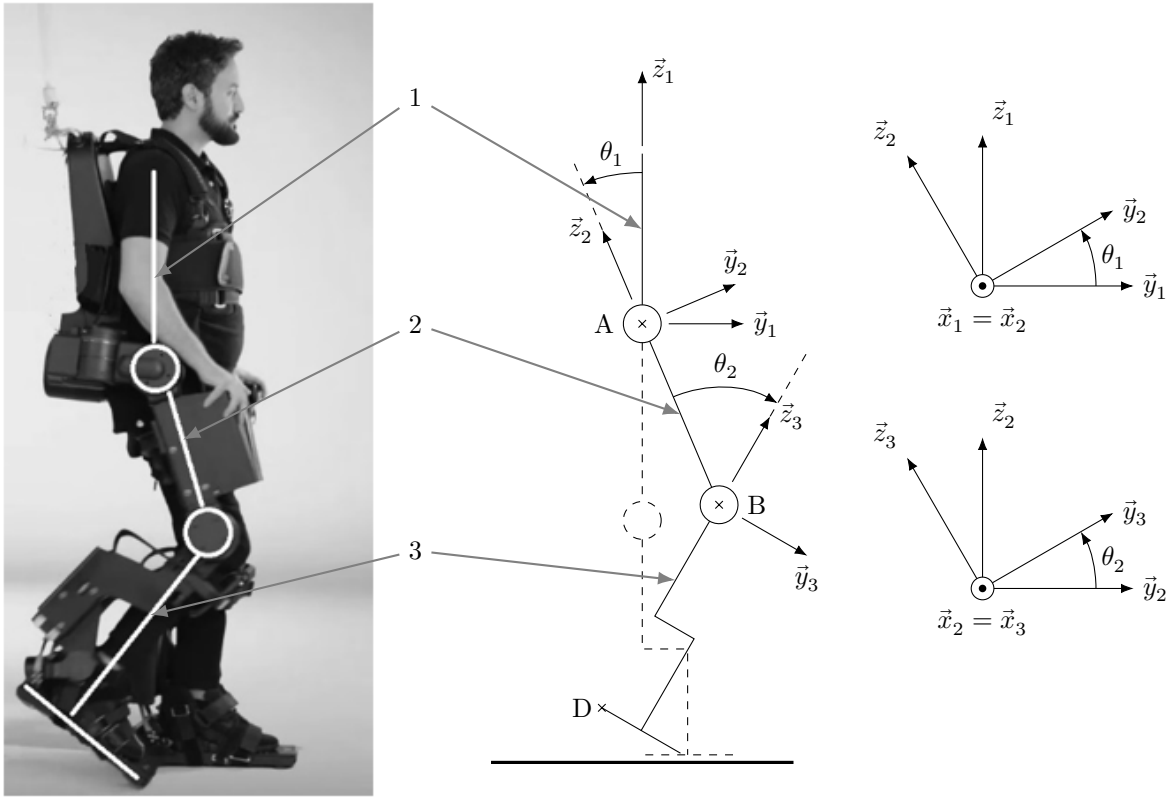


Figure 4 Modélisation utilisée pour la marche en ligne droite

Les positions des différents axes sont asservies à une consigne de référence afin d'obtenir la position désirée pour le point D caractérisant la pointe du talon. Le cahier des charges impose que la position dans l'espace du point D par rapport au point A doive être celle désirée, avec une incertitude maximale de $S_D = 5\,\text{mm}$. On pose :

$$\overrightarrow{AD} = Y\vec{y}_1 + Z\vec{z}_1$$

Q 1. Déterminer les expressions de Y et Z, en fonction de θ_1, θ_2, L_2 et L_3.

L'erreur de positionnement du talon est modélisée par une variation autour d'une position connue. Cette position est paramétrée par les coordonnées Y_0 et Z_0 pour le point D, et par des angles $\theta_{1,0}$ et $\theta_{2,0}$ pour les liaisons pivots. Ce paramétrage se traduit, pour une variation angulaire Δ_θ, considérée égale sur chacun des axes, à des variations de position, Δ_Y et Δ_Z, du point D. On suppose Δ_θ faible, proche de 0.

Q 2. À l'aide du résultat de la question 1, écrit à la position (Y_0, Z_0), puis à la position $(Y_0 + \Delta_Y, Z_0 + \Delta_Z)$, déterminer les expressions de Δ_Y et Δ_Z, en fonction de $\theta_{1,0}$, $\theta_{2,0}$, Δ_θ, L_2 et L_3.

Q 3. Déterminer alors Δ_{YZ}, la norme de la variation de positionnement total du point D dans le plan $(\vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en fonction de $\theta_{2,0}$, Δ_θ, L_2 et L_3.

Le résultat de la question précédente permet alors de relier l'erreur de position du talon S_D à l'erreur de position sur les axes S_θ, en considérant $\Delta_{YZ} = S_D$ et $\Delta_\theta = S_\theta$. La figure 5 donne les évolutions sur un pas de marche de S_D pour plusieurs valeurs de S_θ.

Q 4. À partir de la figure 5, déterminer, parmi les valeurs proposées, l'erreur maximale admissible sur les axes $S_{\theta,\max}$ de l'exosquelette Atalante afin d'éviter la chute du patient.

Quel que soit le résultat trouvé à la question précédente, **une erreur maximale admissible de 0,01 rad** pour chacun des axes sera considérée pour la suite.

Afin de respecter l'exigence sur l'erreur maximale admissible, des asservissements de position et de vitesse ont été élaborés pour chacun des axes **sans prendre en compte l'éventuelle influence du couplage entre les axes**.

Des essais ont alors été effectués afin de mesurer l'évolution réelle des angles de chaque axe par rapport à la trajectoire visée. La figure 6 montre l'évolution de l'erreur pour l'axe de hanche sagittal de la jambe gauche lors d'une marche en ligne droite.

Q 5. À partir de la figure 6 et en justifiant la réponse, conclure sur la capacité des asservissements réalisés sans prise en compte du couplage entre les axes à respecter l'exigence 1.2.1.1.

BY-NC-SA

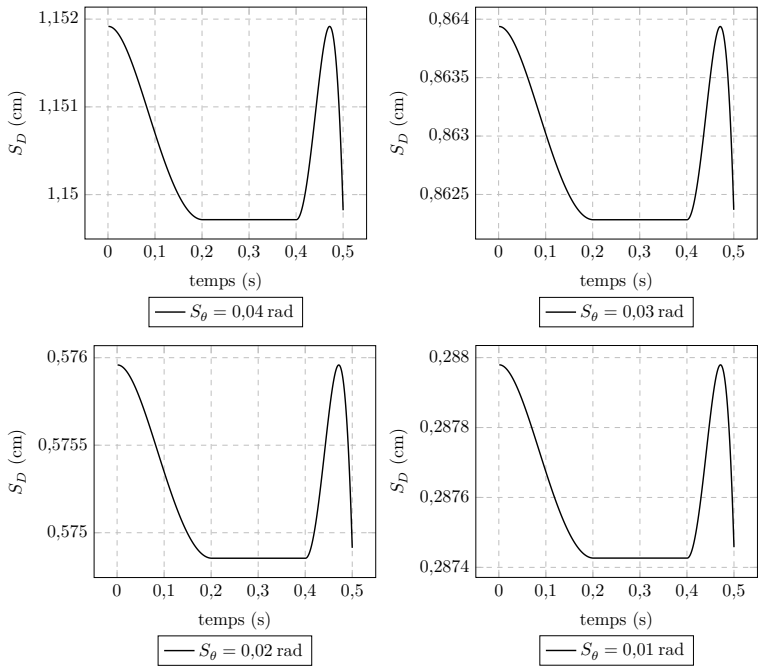


Figure 5 Évolution de S_D sur un pas de marche

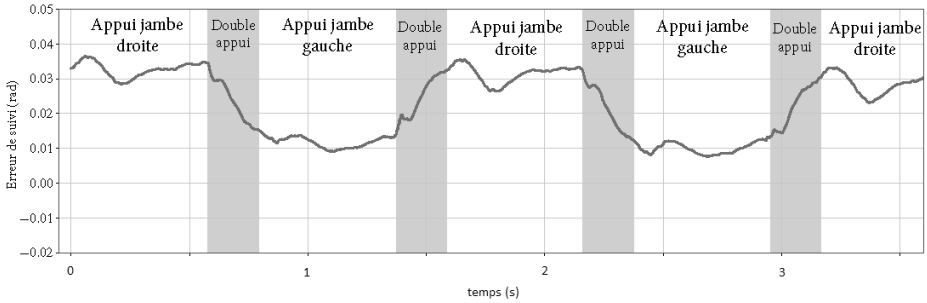


Figure 6 Évolution de l'erreur pour l'axe de hanche sagittal de la jambe gauche

La question précédente met en avant la nécessité d'adopter une démarche de commande globale qui tient compte du couplage entre les axes. Le cahier des charges partiel de l'exosquelette concerné par cette étude (annexe A) fait apparaitre les deux exercices envisagés dans l'utilisation de l'exosquelette (renforcement musculaire et rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche).

Pour cela la structure envisagée de la commande s'appuie sur la figure 7 et peut être décomposée en :

— un directeur de commande haut niveau (non étudié dans ce sujet). Il permet de générer en temps réel les consignes de trajectoire, ou de situation de rééducation à l'arrêt, pour chacun des axes. On suppose que ce directeur de commande, implémenté sur le buste de l'exosquelette, détermine les différentes consignes de trajectoire de manière parfaite ;

— une boucle interne (non linéaire). Elle a pour but de générer les actions mécaniques sur chacun des axes en fonction de la configuration d'évolution de l'exosquelette.

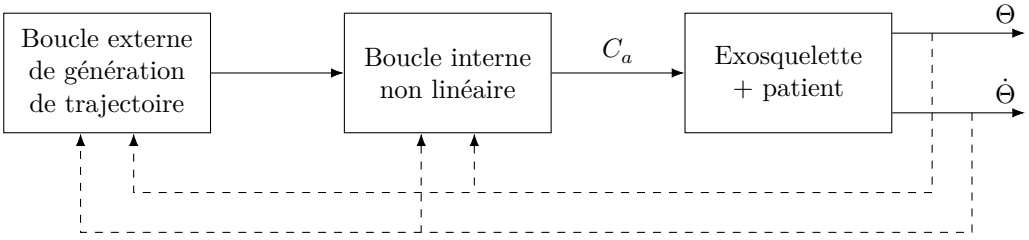


Figure 7 Structure de commande choisie

Sur cette figure, Θ représente l'ensemble des positions angulaires des différents axes de l'exosquelette, et C_a l'ensemble des actions mécaniques appliquées sur les différents axes.

La conception de cette commande nécessite de disposer d'un modèle dynamique de l'exosquelette. La définition et l'analyse de ce modèle dynamique seront réalisées dans la partie II. Il sera ensuite exploité dans la partie III pour la conception des lois de commande.

BY-NC-SA

La loi de commande dans le cas d'exercices de renforcement musculaire sera entièrement déterminée et celle dans le cas d'exercices de rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche sera analysée.

La partie IV permettra une synthèse des études menées.

II Élaboration et analyse d'un modèle dynamique de l'exosquelette

Objectif

Définir un modèle dynamique de l'exosquelette et montrer la nécessité de mettre en place un asservissement.

Afin d'élaborer une commande pour l'exosquelette, il est nécessaire au préalable de définir un modèle dynamique représentatif de son comportement. Seule la commande des articulations sagittales de hanche et de genou d'une jambe lorsqu'elle est décollée du sol (figure 7 et hypothèses associées) sera considérée ici (cas de la marche en ligne droite) avec les hypothèses et notations supplémentaires suivantes, en plus de celles énoncées à la partie précédente :

— la liaison pivot entre 1 et 2 est équipée d'un actionneur dont le couple de sortie (appliqué par 1 sur 2) est noté C_1 ;

— la liaison pivot entre 2 et 3 est équipée d'un actionneur dont le couple de sortie (appliqué par 2 sur 3) est noté C_2 ;

— les différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties sont données en annexe B ;

— on note respectivement C_{genou} et C_{hanche}, les couples appliqués par le patient au niveau des articulations de genou et de hanche.

Le modèle dynamique proposé sera explicité pour mettre en évidence la nécessité d'un asservissement et par la suite (partie III), permettre l'élaboration de la loi de commande globale de l'exosquelette.

II.A – Comportement dynamique de l'exosquelette

On pose pour la suite : $\overrightarrow{BG_3} = -L_0\vec{z}'_3$. On note α l'angle entre $\vec{z}'_3$ et $\vec{z}_3$: $\alpha = (\vec{y}_3, \vec{y}'_3) = (\vec{z}_3, \vec{z}'_3)$.

Q 6. Déterminer les expressions de L_0 et α en fonction de l_0, L_3 et l_3, puis calculer leurs valeurs numériques.

Q 7. Déterminer l'expression de l'accélération du point G_3 (cf. annexe B et question 6) appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, en fonction de L_0, L_2, θ_1, θ_2 et leurs dérivées temporelles.

Q 8. Déterminer l'expression de la projection suivant $\vec{x}_1$ du moment dynamique en A de l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport au buste 1, $\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1$, sous la forme :

$$\vec{\delta}_{A,3/1} \cdot \vec{x}_1 = A_1\ddot{\theta}_1 + A_2\ddot{\theta}_2 + A_3\dot{\theta}_1^2 + A_4\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2$$

Préciser les expressions littérales de A_1, A_2, A_3 et A_4 en fonction des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

Q 9. Proposer une démarche permettant de déterminer l'expression de C_1, l'action mécanique exercée sur la cuisse 2 par l'actionneur correspondant. Préciser le(les) ensemble(s) isolé(s), le(s) bilan(s) des actions mécaniques extérieurs, le(s) théorème(s) utilisé(s) et la(les) équation(s) utile(s).

Q 10. Déterminer l'expression de C_1 en fonction de θ_1, θ_2, leurs différentes dérivées, de C_{hanche} et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties de l'exosquelette.

D'une manière similaire aux questions précédentes, l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {pied+tibia} 3 permet d'obtenir l'expression de C_2, le couple fourni par l'actionneur de genou sagittal :

$$C_2 = \left[I_{x3} + m_3L_0^2\right]\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_3L_2L_0\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2+\alpha) + \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2+\alpha)\right] + m_3gL_0\sin(\theta_2+\theta_1+\alpha) - C_{\text{genou}}$$

Q 11. Déduire des deux équations précédentes que le modèle dynamique considéré peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = M_1\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + M_2\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C + M_3\begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$$

où C est une matrice colonne et M_1, M_2 et M_3 sont des matrices 2×2. Donner l'expression littérale des coefficients de C, M_1, M_2 et M_3 par des relations non linéaires des paramètres de mouvement (θ_1, θ_2), leurs dérivés premières et des différentes caractéristiques géométriques, de masses et d'inerties du problème.

BY-NC-SA

II.B – Analyse du modèle dynamique

Le modèle dynamique déterminé à la question 11 étant couplé et non linéaire, un modèle linéarisé sera exploité afin de faciliter la synthèse de la loi de commande.

Autour de la position pour laquelle le pied se décolle du sol ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -35°$), le modèle dynamique linéarisé est :

$$C_a = \begin{pmatrix} 3{,}4 & 2{,}6 \\ 2{,}6 & 1{,}9 \end{pmatrix} \ddot{\Theta} + \begin{pmatrix} -11{,}5 & -19{,}2 \\ 7{,}7 & 0 \end{pmatrix} \dot{\Theta} + \begin{pmatrix} 108{,}2 & 5{,}2 \\ 15{,}9 & 17{,}1 \end{pmatrix} \Theta - C_p$$

Dans cette relation, on note :

— $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$, les coordonnées angulaires des articulations ;

— $C_p = \begin{pmatrix} C_{\text{hanche}} \\ C_{\text{genou}} \end{pmatrix}$, les actions mécaniques exercées par le patient ;

— $C_a = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, les actions mécaniques générées par les actionneurs.

$\Theta_1(p)$, $\Theta_2(p)$, $C_1(p)$, $C_2(p)$, $C_{\text{hanche}}(p)$ et $C_{\text{genou}}(p)$ représentent les transformées de Laplace de, respectivement, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_{\text{hanche}}(t)$ et $C_{\text{genou}}(t)$. Pour la question suivante, on considère que seul l'actionneur de l'axe de genou est actif ($C_{\text{hanche}} = C_{\text{genou}} = C_1 = 0$) et que les conditions initiales sont nulles.

Q 12. Déterminer les valeurs numériques des coefficients a_i et b_i tels que la fonction de transfert $H_{L4}(p) = \frac{\Theta_2(p)}{C_2(p)}$ s'écrive :

$$H_{L4}(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4}$$

En poursuivant cette démarche, il est alors possible de mettre le modèle dynamique sous la forme de la figure 8, faisant apparaitre le couplage entre les axes.

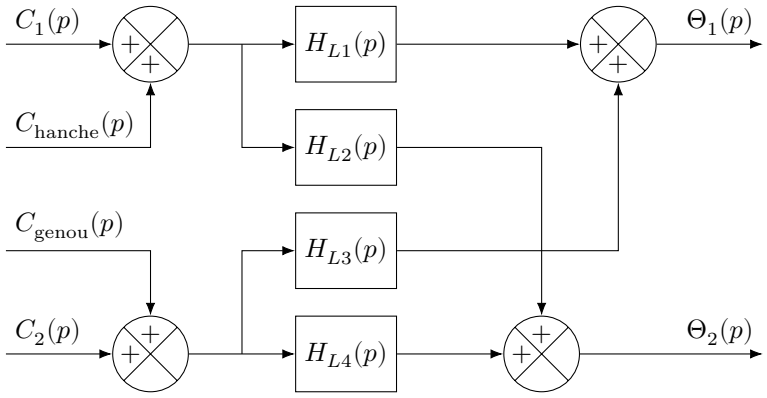


Figure 8 Représentation du modèle dynamique linéarisé

La fonction de transfert $H_{L4}(p)$, une fois les polynômes du numérateur et dénominateur factorisés, s'écrit :

$$H_{L4}(p) = K_{L4} \frac{(p - z_1)(p - z_2)}{(p - p_1)(p - p_2)(p^2 + 0{,}1p + 4{,}9)}$$

avec $z_1 = 1{,}7 + 2{,}2i$, $z_2 = 1{,}7 - 2{,}2i$, $p_1 = -23{,}6$ et $p_2 = 50{,}5$.

Q 13. Au regard de cette fonction de transfert, justifier le besoin de la mise en place d'un asservissement pour l'exosquelette.

III Conception et analyse de lois de commande de l'exosquelette

Le modèle dynamique multivariable de l'exosquelette linéarisé autour d'une position donnée, déterminé à la partie précédente, est exploité pour l'élaboration et l'analyse des lois de commande de l'exosquelette. La boucle interne non linéaire (figure 7) doit permettre au système de respecter le cahier des charges (annexe A) en aboutissant, sur les différents axes considérés, à des actions mécaniques permettant la réalisation de l'exercice thérapeutique envisagé.

Dans les faits, des actionneurs électriques sont présents sur chacun des axes de façon à générer les actions mécaniques. La structure de commande peut alors être détaillée par la figure 9, où C_{ref} représente l'ensemble des valeurs cibles d'actions mécaniques appliquées aux différents axes.

BY-NC-SA

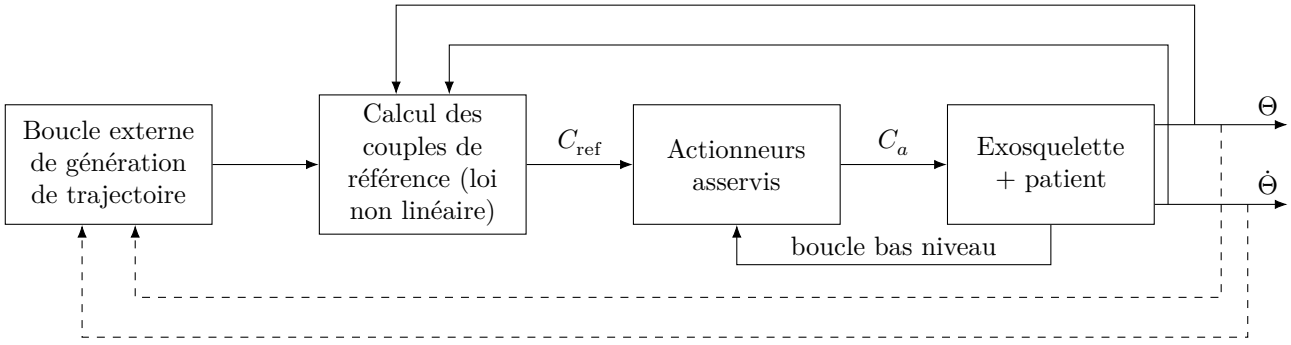


Figure 9 Détail de la structure de commande choisie

L'élaboration de la loi de commande de l'exosquelette se déroule alors en deux étapes :

— l'asservissement en couple des actionneurs (boucle bas niveau) est réalisé en négligeant l'influence des éventuels couplages entre les axes. L'influence de cet asservissement sur la dynamique de l'exosquelette et la validité de cette approche sont étudiées. L'objectif de cette boucle bas niveau est de générer sur l'exosquelette des couples identiques aux couples de référence ;

— le calcul des couples de référence est réalisé par une boucle interne non linéaire.

III.A – Conception de l'asservissement en couple d'un actionneur

Objectif

Élaborer l'asservissement du couple généré par un actionneur, puis le valider par une analyse de son effet sur l'exosquelette.

Lors des phases de rééducation, alors que le patient doit fournir un effort sous le contrôle du thérapeute, l'exosquelette doit réagir de façon totalement transparente pour le patient. En effet, l'exosquelette doit aider le patient, ou lutter contre les actions du patient, selon le protocole choisi par le thérapeute, et cela sans aucun à-coup. Ce constat implique que le temps de réponse de l'actionneur concerné par la phase rééducative doit être inférieur au temps de réponse physiologique du patient. La grande polyvalence de l'exosquelette a contraint les ingénieurs à choisir un temps de réponse de l'asservissement en couple de l'ordre de 0,1 ms. L'objectif de cette partie est donc de concevoir l'asservissement du couple généré par les actionneurs et de vérifier si son action est bien transparente pour le patient.

III.A.1) Modèle dynamique d'un axe

Dans le but de concevoir l'asservissement du couple généré par un actionneur, il est nécessaire de déterminer le modèle dynamique de l'axe correspondant.

On considère le cas de l'ensemble {pied+tibia} 3, mis en mouvement par un actionneur placé sur la cuisse 2, supposée fixe et verticale ($\theta_1 = 0$). L'influence des caractéristiques d'inertie et masse de l'actionneur est négligeable devant celle de l'ensemble {pied+tibia} 3. L'action mécanique exercée par le patient au niveau de l'articulation du genou est notée C_{genou}, celle exercée par l'actionneur sur l'axe de genou est notée C_2.

Q 14. Déterminer l'expression de l'accélération du point G_3 appartenant à l'ensemble {pied+tibia} 3 dans son mouvement par rapport à la cuisse 2 en fonction de L_0, θ_2 et ses dérivées.

Q 15. Par application du théorème du moment dynamique à l'ensemble {pied+tibia} 3 au point B, projeté suivant la direction $\vec{x}_1$, donner l'expression de C_2 sous la forme :

$$C_2 = A_{\text{eq}}\ddot{\theta}_2 + C_r$$

Préciser les expressions de A_{eq} en fonction de I_{x3}, m_3, L_0 et de C_r en fonction de C_{genou}, m_3, L_0, α et θ_2. Faire l'application numérique pour A_{eq}.

III.A.2) Élaboration de la commande en couple de l'actionneur

En exploitant le modèle dynamique précédent, le correcteur de la chaine d'asservissement en couple de l'actionneur doit être déterminé de façon à vérifier le cahier des charges ci-dessous :

Stabilité	**Réponse à un échelon de consigne**	
	Rapidité	**Précision**
régime apériodique critique	$t_{r,5\,\%} = 0{,}1$ ms ($\pm 10\,\%$)	écart en régime permanent inférieur à 1 %

BY-NC-SA

L'actionneur utilisé est un ensemble motoréducteur. Le schéma-bloc présentant la structure de la commande utilisée et le procédé est présenté en annexe C avec :

— $R_m = 2{,}28\,\Omega$;

— $L_m = 0{,}49\,\text{mH}$;

— $k_i = k_e = 0{,}89\,\text{N·m·A}^{-1}$;

— r rapport de transmission du motoréducteur ($r = \frac{1}{100}$) ;

— $A_{\text{eq}} = 2{,}0\,\text{kg·m}^2$, quel que soit le résultat obtenu à la question 15 ;

— C_{pert} couple de perturbation (correspondant à C_r rapporté sur l'axe de l'actionneur) ;

— C_{ref} couple de consigne désiré en sortie de l'actionneur ;

— $K_{\text{capi}} = 1\,\text{V·A}^{-1}$.

Pour la suite de cette partie, les conditions initiales sont considérées nulles et la synthèse du correcteur de type proportionnel-intégral se fait en considérant $C_{\text{pert}} = 0$:

$$C_i(p) = K\frac{1+Tp}{p}$$

Q 16. Calculer, en donnant les expressions littérales de K_c, T_c, ξ_c et ω_c, l'expression de la fonction de transfert $H_C(p) = \frac{C_m(p)}{C_{ref}(p)}$ sous la forme :

$$H_C(p) = K_c\frac{1+T_cp}{1+2\xi_c\frac{p}{\omega_c}+\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^2}$$

Pour simplifier la synthèse du correcteur, l'influence du zéro de $H_C(p)$ n'est pas prise en compte.

Q 17. Déterminer l'expression littérale, puis la valeur numérique, de K afin de respecter le cahier des charges en termes de rapidité (rappel : $t_{r,5\,\%}\omega_c \approx 5$ pour un régime apériodique critique).

Q 18. Déterminer l'expression littérale, puis la valeur numérique, de T afin de respecter le cahier des charges en termes de stabilité.

Q 19. Déterminer l'expression littérale, puis la valeur numérique, de K_1 afin d'obtenir $K_C = r$ pour $H_C(p)$. Justifier la volonté d'obtenir cette valeur de gain pour $H_C(p)$.

La figure 10 présente l'évolution temporelle de C_2, pour une entrée de type échelon de $1\,\text{N·m}$.

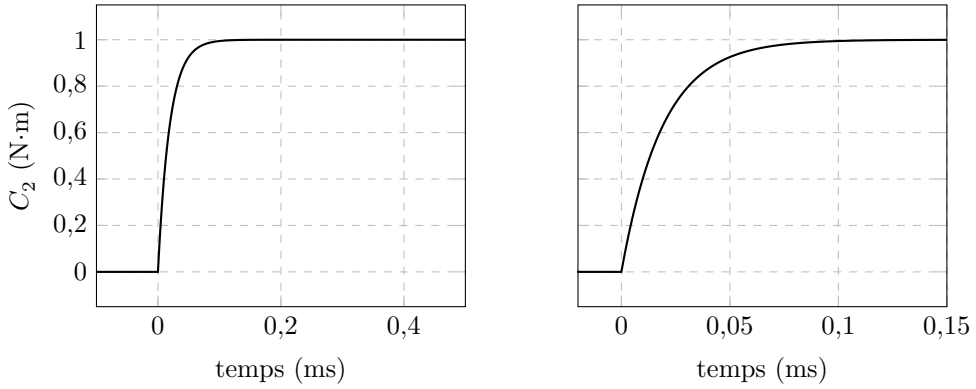


Figure 10 Réponse indicielle en couple de l'actionneur (agrandissement à droite)

Q 20. À partir de la figure 10, discuter du respect des exigences de l'asservissement en couple.

III.A.3) Vérification de la cohérence de la commande en couple sur l'exosquelette

La conception de l'asservissement du couple de l'actionneur a été réalisée sans prendre en compte les couplages entre les axes mis en évidence à la partie précédente. Afin de vérifier le comportement de cette commande une fois les axes couplés, il est nécessaire de considérer le réglage obtenu, mais en tenant compte de la dynamique globale de l'exosquelette déterminée dans la partie II comprenant le couplage entre les axes.

La figure 11 présente les réponses indicielles (entrée de type échelon de $1\,\text{N·m}$) de la position angulaire θ_2 pour le modèle dynamique de l'exosquelette pris seul (noté Mod1) et le modèle dynamique de l'exosquelette associé à ses actionneurs avec l'asservissement en couple élaboré précédemment (noté Mod2), ainsi que l'écart angulaire entre ces deux modèles.

La figure 12 présente les réponses indicielles (entrée de type échelon de $1\,\text{N·m}$) du couple C_2 pour le modèle dynamique de l'exosquelette associé à ses actionneurs avec l'asservissement en couple élaboré précédemment (Mod2) et pour le modèle dynamique de l'axe pris seul (noté Mod3), ainsi que l'écart en couple entre ces deux modèles.

BY-NC-SA

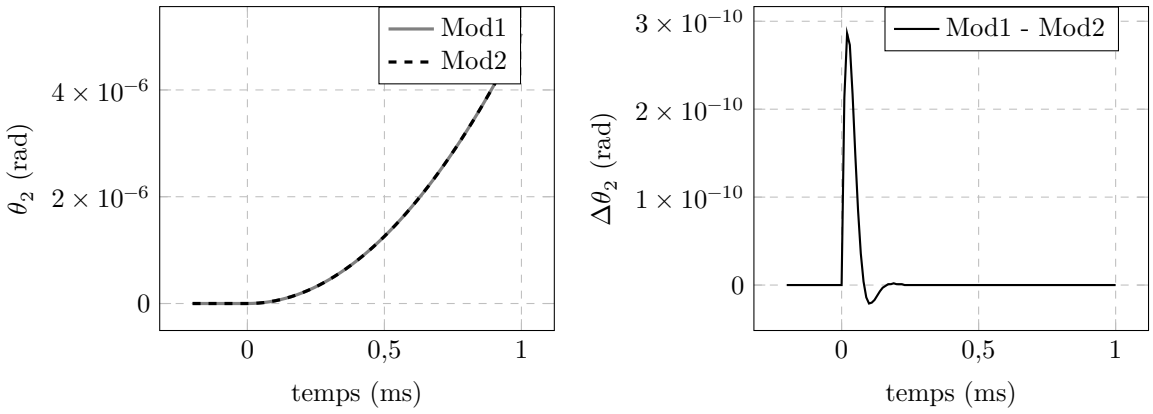


Figure 11 Réponse indicielle angulaire des modèles Mod1 et Mod2 et écart de position angulaire

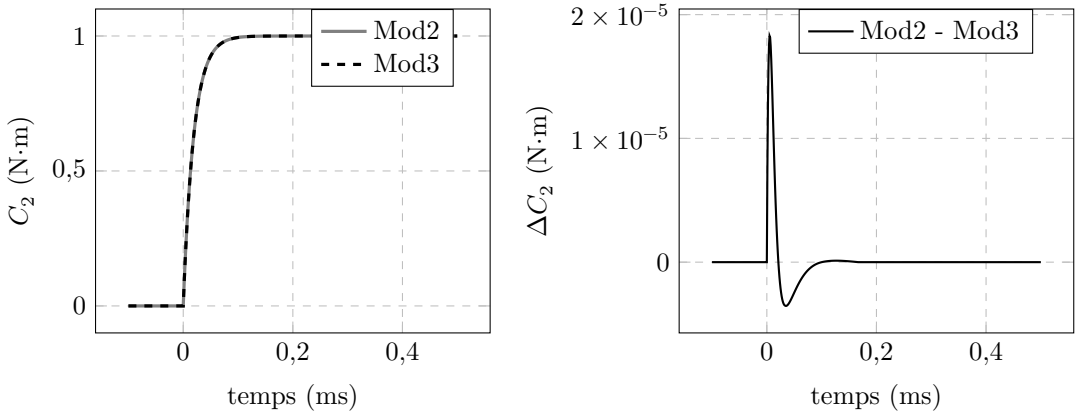


Figure 12 Réponse indicielle en couple des modèles Mod2 et Mod3 et écart de couple

Q 21. À partir des figures 11 et 12, conclure sur la possibilité de considérer l'asservissement en couple comme amenant une action transparente pour le patient.

Cet asservissement en couple permet, sur la figure 9, de considérer que si les couples de commande C_{ref} sont générés correctement, alors les couples C_a appliqués sur les articulations permettront au patient d'avoir la trajectoire voulue. L'élaboration de la loi de commande non linéaire peut se faire en considérant directement des commandes en couples pour chacun des axes, c'est-à-dire en considérant la réponse en couple des actionneurs comme unitaire.

III.B – Synthèse de la loi de commande de l'exosquelette

Objectif

Élaborer une loi de commande en phase de rééducation à la *proprioception* de la verticalité et de la marche, et en phase de *renforcement musculaire*.

Les actionneurs ayant été asservis en couple, la loi de commande est réalisée pour générer des consignes en couple. Ces consignes doivent permettre à l'exosquelette de réaliser les deux types d'exercices désirés :

— le renforcement musculaire. Cette partie étudie la synthèse d'une loi de commande pour cet exercice ;

— la rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche. Cette partie analyse une loi de commande donnée pour cet exercice.

BY-NC-SA

III.B.1) Formulation d'un modèle pour la synthèse de la loi de commande

Le modèle dynamique de l'exosquelette, déterminé à l'aide de la partie II.A question 11, est de la forme :

$$M_1(\Theta,\dot{\Theta})\ddot{\Theta} + M_2(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta} + C(\Theta,\dot{\Theta}) + M_3(\Theta,\dot{\Theta})C_p = C_{\text{ref}}$$

Dans cette équation, on note :

— $\Theta = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$, les coordonnées angulaires des articulations ;

— C, la matrice colonne correspondant aux effets de la pesanteur ;

— $C_p = \begin{pmatrix}C_{\text{hanche}}\\ C_{\text{genou}}\end{pmatrix}$, les actions mécaniques exercées par le patient ;

— $C_{\text{ref}} = \begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$, les actions mécaniques de consigne (générées par les actionneurs dont les boucles d'asservissement en couple sont considérées comme infiniment rapides).

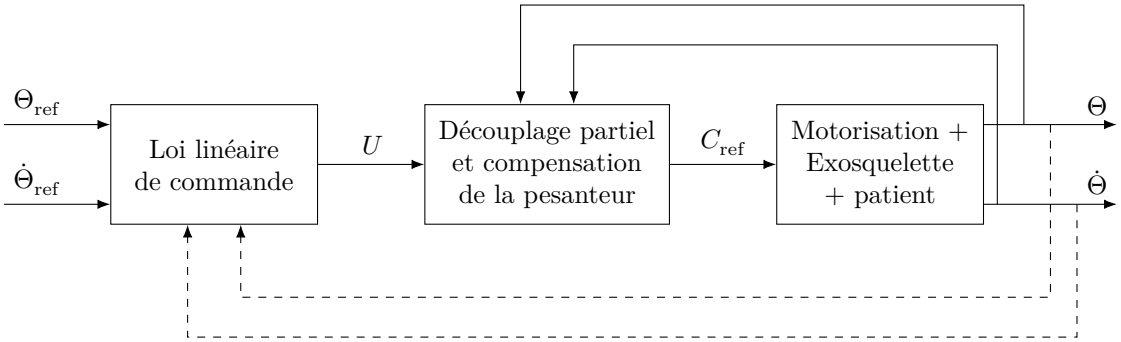


Figure 13 Structure de la loi de commande couplée

La structure de la loi de commande choisie, présentée figure 13, est réalisée selon deux boucles :

— une boucle externe linéaire ;

— une boucle interne non linéaire, devant permettre le découplage partiel du modèle dynamique et la compensation de la pesanteur, qui détermine le couple C_{ref} par la relation :

$$C_{\text{ref}} = M_1(\Theta,\dot{\Theta})U + M_2(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta} + C(\Theta,\dot{\Theta})$$

où $U = \begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}$ sont les commandes issues du correcteur linéaire de la boucle externe.

On note, de plus, les consignes de positions angulaires sous la forme $\Theta_{\text{ref}} = \begin{pmatrix}\theta_{1,\text{ref}}\\ \theta_{2,\text{ref}}\end{pmatrix}$.

En utilisant la loi correspondant à la boucle interne, le modèle dynamique peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\Theta} = U + N(\Theta,\dot{\Theta},C_p)$$

où $N(\Theta,\dot{\Theta},C_p) = M(\Theta,\dot{\Theta})C_p$.

Q 22. Préciser l'expression de la matrice M introduite précédemment en fonction de M_1 et M_3.

Afin de réaliser cette loi de commande, il est nécessaire de linéariser le modèle dynamique autour du point de fonctionnement. Ce point de fonctionnement est défini par :

— $\Theta_0 = \begin{pmatrix}\theta_{1,0}\\ \theta_{2,0}\end{pmatrix}$, les coordonnées angulaires des articulations au point de fonctionnement ;

— $C_{p,0} = \begin{pmatrix}C_{\text{hanche},0}\\ C_{\text{genou},0}\end{pmatrix}$, les actions mécaniques exercées par le patient au point de fonctionnement ;

— $u = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$, les variations des grandeurs de commandes autour de $U_0 = \begin{pmatrix}U_{1,0}\\ U_{2,0}\end{pmatrix}$;

— $\tilde{\theta} = \begin{pmatrix}\tilde{\theta}_1\\ \tilde{\theta}_2\end{pmatrix}$, les variations des positions angulaires autour de $\Theta_0 = \begin{pmatrix}\theta_{1,0}\\ \theta_{2,0}\end{pmatrix}$;

— $c_p = \begin{pmatrix}c_{\text{hanche}}\\ c_{\text{genou}}\end{pmatrix}$, les variations des actions mécaniques exercées par le patient autour de $C_{p,0} = \begin{pmatrix}C_{\text{hanche},0}\\ C_{\text{genou},0}\end{pmatrix}$.

BY-NC-SA

Une linéarisation du modèle précédent permet d'aboutir, autour du point de fonctionnement correspondant au décollement du pied, au système différentiel suivant :

$$\ddot{\tilde{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 & 2338 \\ 0 & -2921 \end{pmatrix}\tilde{\theta} + \begin{pmatrix} 7{,}35 & 9{,}93 \\ 9{,}93 & 12{,}9 \end{pmatrix}c_p + u$$

On ne considère que le renforcement musculaire $c_p = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{\text{genou}} \end{pmatrix}$.

Le modèle précédent permet de décrire le comportement de l'exosquelette. Aucune adaptation de la commande n'étant faite, il correspond au système non corrigé et sera exploité pour déterminer la loi de commande.

Les transformées de Laplace des variations $\tilde{\theta}_1(t)$, $\tilde{\theta}_2(t)$, $c_{\text{genou}}(t)$, $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont respectivement notées $\tilde{\theta}_1(p)$, $\tilde{\theta}_2(p)$, $C_g(p)$, $U_1(p)$ et $U_2(p)$.

Q 23. À partir du modèle précédent et de la transformée de Laplace, donner les deux relations permettant de relier $\tilde{\theta}_1(p)$, $\tilde{\theta}_2(p)$, $C_g(p)$, $U_1(p)$ et $U_2(p)$. Il n'est pas demandé d'établir les fonctions de transfert.

Q 24. Conclure sur la stabilité du système non corrigé.

III.B.2) Dimensionnement de la loi de commande pour le renforcement musculaire

En exercice de renforcement musculaire, le protocole de rééducation envisagé est que l'exosquelette réagisse aux actions mécaniques exercées par le patient avec un comportement de type raideur dont la valeur est définie en annexe A. Une action mécanique du patient sur un des axes engendre alors un déplacement de cet axe. La relation entre ces deux grandeurs en régime permanent doit être linéaire et leur rapport est appelé « raideur ».

Pour ne pas perturber l'exercice, l'influence d'une action du patient sur une articulation doit être faible sur les autres articulations. Ainsi, la relation entre une action du patient sur le genou et le mouvement de l'exosquelette au niveau de la hanche doit aussi être du type raideur, mais avec un coefficient 200 fois plus important.

On note $\tilde{\theta}_{\text{ref}} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_{1,\text{ref}} \\ \tilde{\theta}_{2,\text{ref}} \end{pmatrix}$ les variations de consignes de position angulaire des axes. Les transformées de Laplace de $\tilde{\theta}_{1,\text{ref}}(t)$ et $\tilde{\theta}_{2,\text{ref}}(t)$ sont respectivement notées $\tilde{\theta}_{1,\text{ref}}(p)$ et $\tilde{\theta}_{2,\text{ref}}(p)$.

Les écarts sur chacun des axes d'articulation étudiés sont définis par $\tilde{\varepsilon}_1 = \tilde{\theta}_{1,\text{ref}} - \tilde{\theta}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\theta}_{2,\text{ref}} - \tilde{\theta}_2$ et $\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}$.

Q 25. Justifier, sans calcul et en supposant que le système converge en boucle fermée, qu'une commande avec une action intégrale ne permettra pas d'obtenir un comportement de type raideur avec le coefficient de valeur désirée.

La commande choisie est du type proportionnelle-dérivée. Avec K_p et K_v des matrices 2×2 et K_v diagonale, u se note $u = K_p\tilde{\varepsilon} + K_v\dot{\tilde{\varepsilon}}$ où $K_p = \begin{pmatrix} K_{p11} & K_{p12} \\ K_{p21} & K_{p22} \end{pmatrix}$ et $K_v = \begin{pmatrix} K_{v11} & 0 \\ 0 & K_{v22} \end{pmatrix}$.

En exercice de renforcement musculaire, $\tilde{\theta}_{\text{ref}}$ et $\dot{\tilde{\theta}}_{\text{ref}}$ sont nuls. Seule l'action du patient met en mouvement l'exosquelette. Les transformées de Laplace de $\tilde{\varepsilon}_1(t)$ et $\tilde{\varepsilon}_2(t)$ sont notées $\tilde{\varepsilon}_1(p)$ et $\tilde{\varepsilon}_2(p)$

Q 26. À partir du modèle linéarisé, et avec le correcteur proposé, déterminer les expressions de $\tilde{\theta}_1(p)$ et $\tilde{\theta}_2(p)$ sous la forme $\tilde{\theta}_1(p) = H_{C1}(p)C_g(p) + H_{C2}(p)\tilde{\theta}_2(p)$ et $\tilde{\theta}_2(p) = H_{C3}(p)C_g(p) + H_{C4}(p)\tilde{\theta}_1(p)$.

Q 27. Afin d'obtenir le découplage entre les axes, déterminer les valeurs des coefficients non diagonaux de K_p permettant d'obtenir $H_{C2}(p) = H_{C4}(p) = 0$.

Q 28. Déterminer les coefficients diagonaux des matrices K_p et K_v afin que les fonctions de transfert $H_{C1}(p)$ et $H_{C3}(p)$ soient assimilables à des fonctions du deuxième ordre $H_{C1}(p) = \dfrac{K_1}{1 + 2\xi\dfrac{p}{\omega_1} + \left(\dfrac{p}{\omega_1}\right)^2}$ et $H_{C3}(p) = \dfrac{K_3}{1 + 2\xi\dfrac{p}{\omega_3} + \left(\dfrac{p}{\omega_3}\right)^2}$ permettant d'obtenir des valeurs limites de raideurs respectant l'exigence 1.2.1.1. et ayant un coefficient d'amortissement $\xi = 0{,}7$.

Q 29. La rapidité de chacun des axes peut-elle être réglée indépendamment avec une telle commande ?

III.B.3) Analyse de la loi de commande pour la rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche

En exercice de rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche, les actions mécaniques exercées par le patient sont nulles et les consignes de position non nulles.

Q 30. Justifier, sans calcul, que le correcteur élaboré précédemment ne permet pas à l'exosquelette de respecter le cahier des charges en termes de précision lors de la phase considérée ici.

BY-NC-SA

Un correcteur, comprenant une composante intégrale, a été déterminé en vue de respecter le cahier des charges dans le cas d'un exercice de rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche. L'annexe D présente les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $\frac{\tilde{\theta}_2(p)}{\tilde{\varepsilon}_2(p)}$, la boucle $\frac{\tilde{\theta}_1(p)}{\tilde{\theta}_{1,\text{ref}}(p)}$ étant fermée.

On suppose que cette fonction de transfert n'a pas de pôle à partie réelle positive.

Q 31. Analyser les marges de stabilité de cette boucle avec cette loi de commande et conclure sur ses performances au regard des exigences liées à la rééducation de la proprioception de la verticalité et de la marche.

IV Synthèse

La figure 14 représente une simulation comportementale de l'actionneur du genou dans le plan sagittal lors du décollage du pied pendant la marche, lors d'un exercice de renforcement musculaire pour un couple exercé par le patient de C_{genou} de 1 N·m avec la commande synthétisée à la partie précédente.

La figure 15 représente une simulation comportementale de l'actionneur du genou dans le plan sagittal lors du décollage du pied pendant la marche, lors d'un exercice de rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche, avec le réglage de la commande présenté à la partie précédente, pour le ralliement à une position désirée de $\tilde{\theta}_{1,\text{ref}} = 1{,}4 \times 10^{-2}$ rad et $\tilde{\theta}_{2,\text{ref}} = 0{,}9 \times 10^{-2}$ rad.

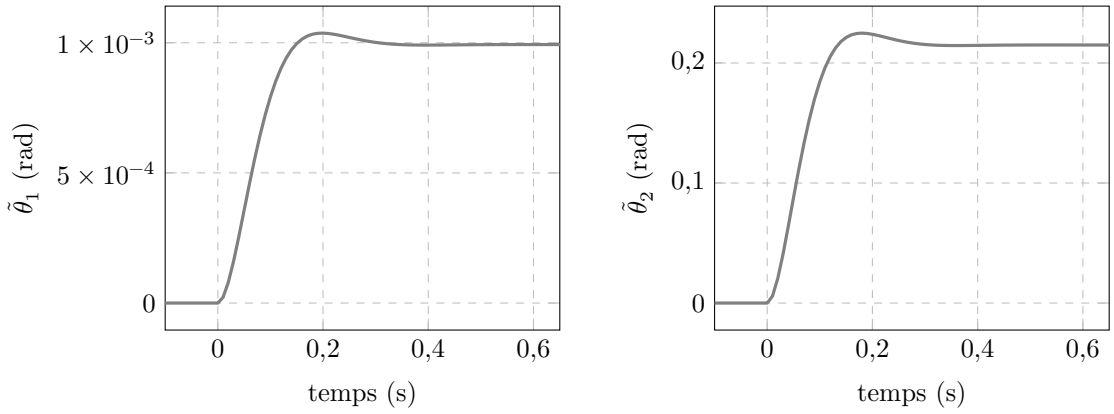


Figure 14 Évolution angulaire des articulations lors d'un renforcement musculaire

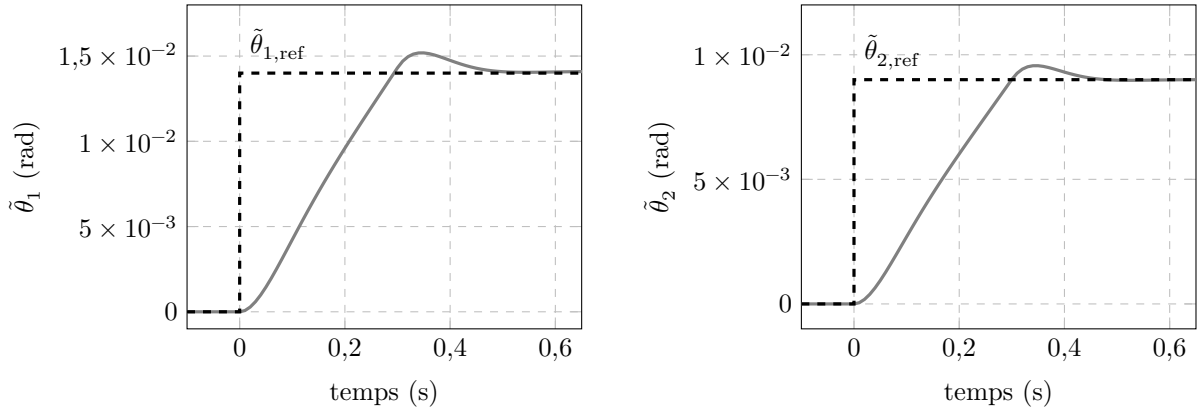


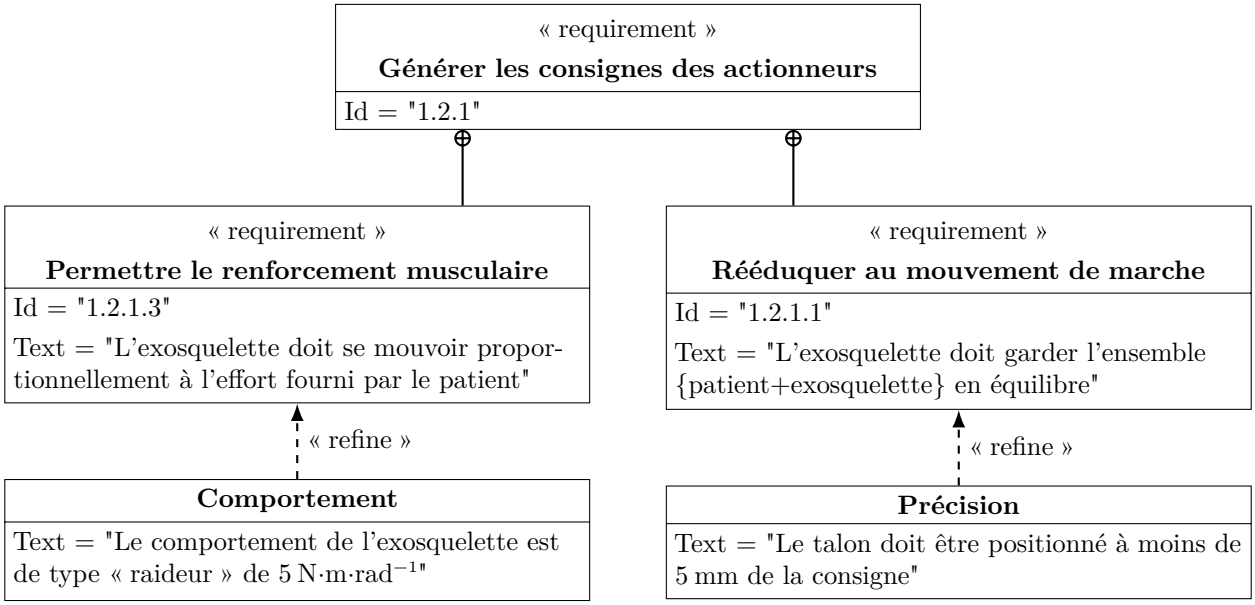
Figure 15 Évolution angulaire des articulations lors d'une rééducation à la proprioception de la verticalité et de la marche

Q 32. Commenter les figures 14 et 15. Conclure sur le respect du cahier des charges avec les lois de commande considérées, vis-à-vis de la stabilité du patient et du type de comportement de rééducation de l'exosquelette.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

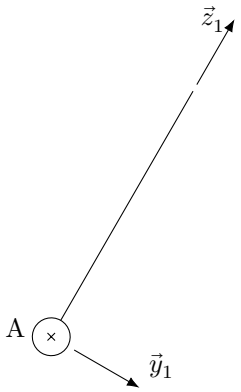
Annexe A Diagramme des exigences partiel de l'exosquelette



Annexe B Caractéristiques géométriques, d'inerties et de masses

On note G_i le centre d'inertie de l'ensemble i.

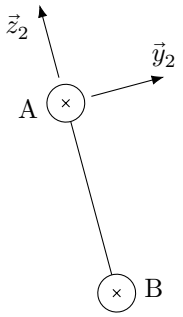
Buste 1 :



- $\overrightarrow{AG_1} = l_1\vec{z}_1$
- $l_1 = 0{,}48$ m

- masse : $m_1 = 65$ kg

Cuisse 2 :



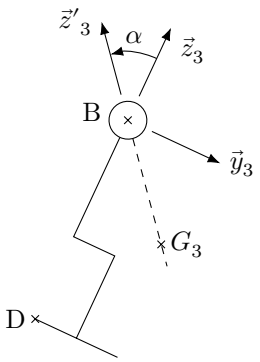
- $\overrightarrow{BG_2} = l_2\vec{z}_2$
- $\overrightarrow{BA} = L_2\vec{z}_2$
- $l_2 = 0{,}25$ m
- $L_2 = 0{,}40$ m

- masse : $m_2 = 15$ kg
- opérateur d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_{A,2} = \begin{pmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$$

- $I_{x2} = 0{,}10$ kg·m^2

Tibia+pied 3 :



- $\overrightarrow{DB} = L_3\vec{z}_3$
- $\overrightarrow{DG_3} = l_0\vec{y}_3 + l_3\vec{z}_3$
- $\overrightarrow{BG_3} = -L_0\vec{z'}_3$
- $l_0 = 0{,}2$ m
- $L_3 = 0{,}55$ m
- $l_3 = 0{,}30$ m

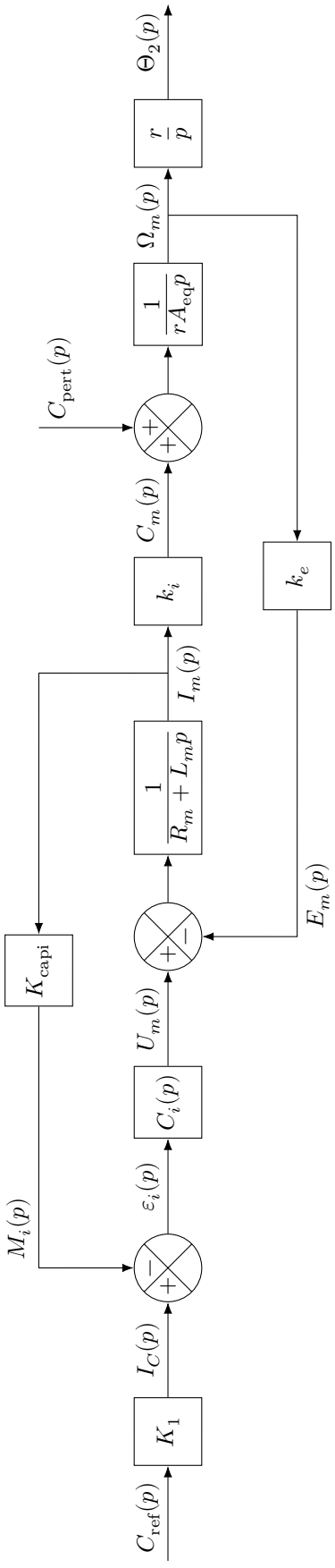
- masse : $m_3 = 18$ kg
- opérateur d'inertie :

$$\overline{\overline{I}}_{G_3,3} = \begin{pmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & I_{yz3} \\ 0 & I_{yz3} & I_{z3} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

- $I_{x3} = 0{,}08$ kg·m^2

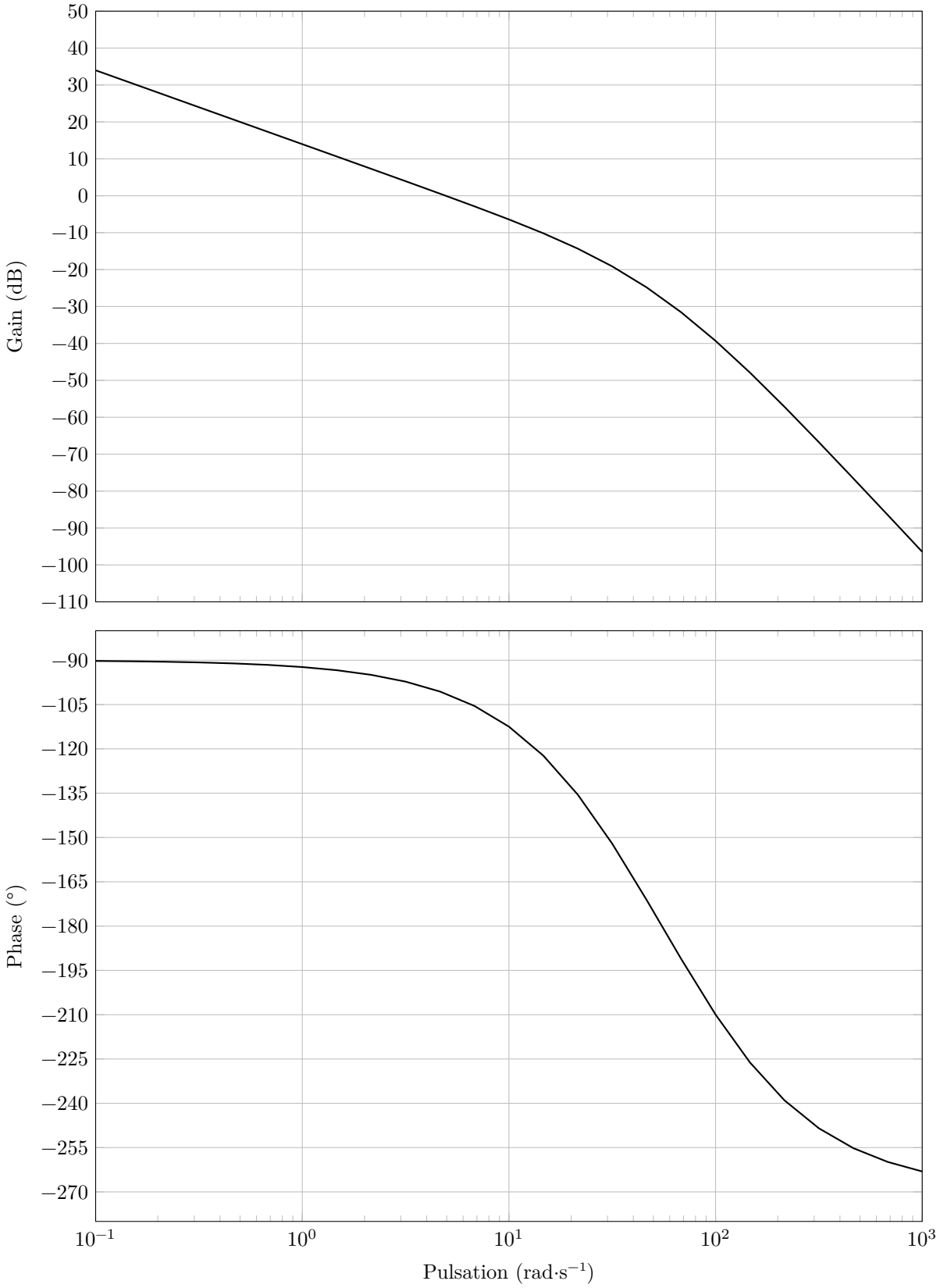
BY-NC-SA

Annexe C Schéma-bloc de l'asservissement d'un actionneur



BY-NC-SA

Annexe D Diagramme de Bode de $\frac{\tilde{\theta}_2(p)}{\tilde{\varepsilon}_2(p)}$ avec boucle $\frac{\tilde{\theta}_1(p)}{\tilde{\theta}_{1,\mathrm{ref}}(p)}$ fermée



BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Cinématique du solide : paramétrage, vitesse, taux de rotation et torseur cinématique
- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens
- Amplificateur linéaire intégré, stabilité et rétroaction
- Régimes transitoires
- Filtrage linéaire
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi