Concours Centrale-Supélec, France

Session 2025, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : comportement dynamique de l'avion
- Partie B : étude de la chaîne cinématique de la gouverne de profondeur
- Partie C : réglage du pilote automatique
- Partie D : synthèse

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2025/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

S2I

4 heures

PSI

Calculatrice autorisée

2025

Réglage d'un pilote automatique pour un avion léger biplace



Figure 1 – L'Elixir en vol © Elixir Aircraft

Contexte

L'entreprise française Elixir Aircraft commercialise un petit avion léger biplace, l'Elixir, destiné entre autres à la formation des pilotes (figure 1).

Cet avion est conçu selon une structure en OneShot, technique consistant à concevoir et fabriquer les éléments complexes (aile et fuselage) en une seule pièce en exploitant les avantages des matériaux composites, supprimant par la même occasion les difficultés causées par les assemblages. Les bénéfices sont nombreux : moins de pièces et moins d'assemblages se traduisent par un nombre de défaillances plus faible, la diminution de la maintenance et donc un coût réduit. Parallèlement, la sécurité est renforcée par la simplicité de la structure et les performances sont améliorées par la masse réduite. L'Elixir est ainsi 50 % plus économe en carburant que la grande majorité des avions équivalents.

Un pilote automatique est un système permettant d'assurer un nombre important de fonctions, sans l'intervention du pilote, comme la stabilisation de l'avion, le suivi d'une trajectoire, le maintien à une altitude fixée ou même l'atterrissage. De nombreux avions sont équipés de tels types de systèmes.

L'Elixir est équipé d'un pilote automatique deux axes, permettant le contrôle du roulis et du tangage, respectivement via les ailerons et la gouverne de profondeur. Les différents constituants de l'avion sont présentés dans l'annexe A.

Objectif

Étudier la structure partielle de commande du pilote automatique et concevoir les lois de commande associées en vue de permettre la stabilisation en vol de croisière de façon à maintenir une altitude et une vitesse constantes.

Constitution du système de pilotage automatique

L'implantation du pilote automatique fait appel en particulier à deux servomoteurs GSA 28 Smart Autopilot Servo agissant par le biais d'un système de transmission (par tringlerie) sur les ailerons d'une part, sur la gouverne de profondeur d'autre part. Les servomoteurs sont commandés par l'intermédiaire d'une unité GARMIN G3X Touch 10"

GDU460. Les commandes sont élaborées d'un point de vue plus général à partir des mesures de l'altitude, de l'orientation de l'avion et de la vitesse obtenues par un ensemble de capteurs. Les grandeurs acquises sont transmises à une unité ADAHRS (Air Data Attitude Heading Reference System) dont la fonction est de rendre les données exploitables par l'unité de traitement GARMIN GDU460.

Pour cette étude, restreinte au pilotage des seules vitesses horizontale et verticale, la structure du pilote automatique est représentée sur la figure 2 selon une architecture de régulation dite monovariable :

- la vitesse horizontale V_x est pilotée par la force de propulsion F_m du moteur thermique et de son hélice. Celle-ci est déterminée par un correcteur opérant à partir de l'écart de vitesse horizontale ε_x ;
- la vitesse verticale V_z est pilotée par l'angle β de la gouverne de profondeur, actionné par l'un des deux servomoteurs, à partir de l'écart de vitesse verticale ε_z.

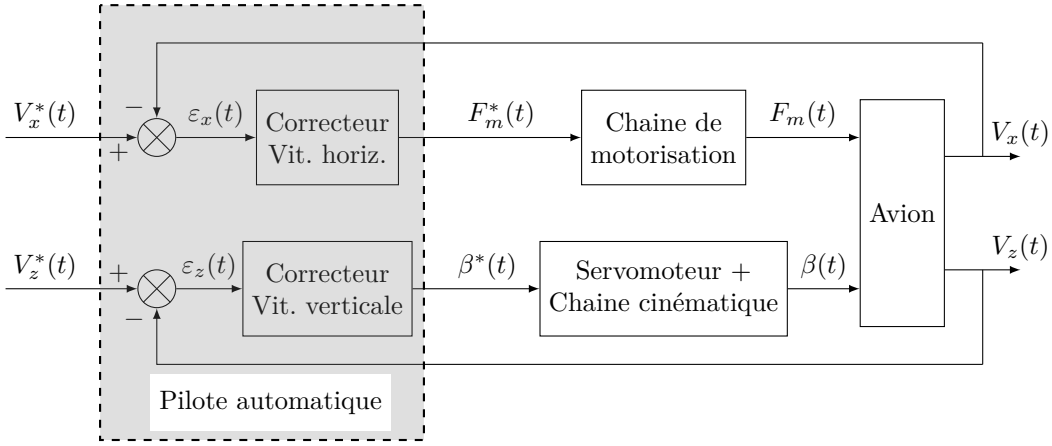


Figure 2 – Structure restreinte du pilote automatique

Cette structure de régulation est dite monovariable car elle ne fait pas intervenir de terme de couplage de la vitesse verticale V_z dans le calcul de la force de propulsion F_m ni de la vitesse horizontale V_x dans le calcul de l'angle de gouverne β. En pratique, les grandeurs de commande issues des correcteurs sont les consignes F_m^* et β^*, respectivement de la force de propulsion F_m générée par le moteur thermique et de l'angle de la gouverne de profondeur β.

Problématique et démarche de l'étude

L'objectif de cette étude est le calcul des correcteurs des deux boucles de vitesse de façon à ce que le pilote automatique assure les contraintes du cahier des charges décrites par le diagramme d'exigences donné figure 3.

Pour atteindre cet objectif, la procédure de synthèse des lois de commande suit les phases suivantes :

- conception d'un modèle dynamique non linéaire qui doit permettre
  - la validation en simulation des performances du pilote automatique, au regard des exigences du cahier des charges,
  - la définition des modèles linéaires (par linéarisation au 1$^{\text{er}}$ ordre) pour le calcul des correcteurs des deux boucles d'asservissement ;
- calcul des paramètres des correcteurs du pilote automatique ;
- analyse de la robustesse (capacité à conserver les performances souhaitées) du pilote automatique au regard de la variation de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude.

Cette dernière phase fera également l'objet d'une synthèse globale et l'ensemble sera complété par une étude intermédiaire en vue de définir le modèle de la chaine cinématique de la gouverne de profondeur.

Partie A – Comportement dynamique de l'avion

Objectif

Déterminer un modèle dynamique décrivant l'évolution de l'altitude de l'avion en prenant l'angle de la gouverne de profondeur et la force exercée par le moteur thermique et son hélice comme entrées de commande, la force exercée par le vent comme entrée de perturbation.

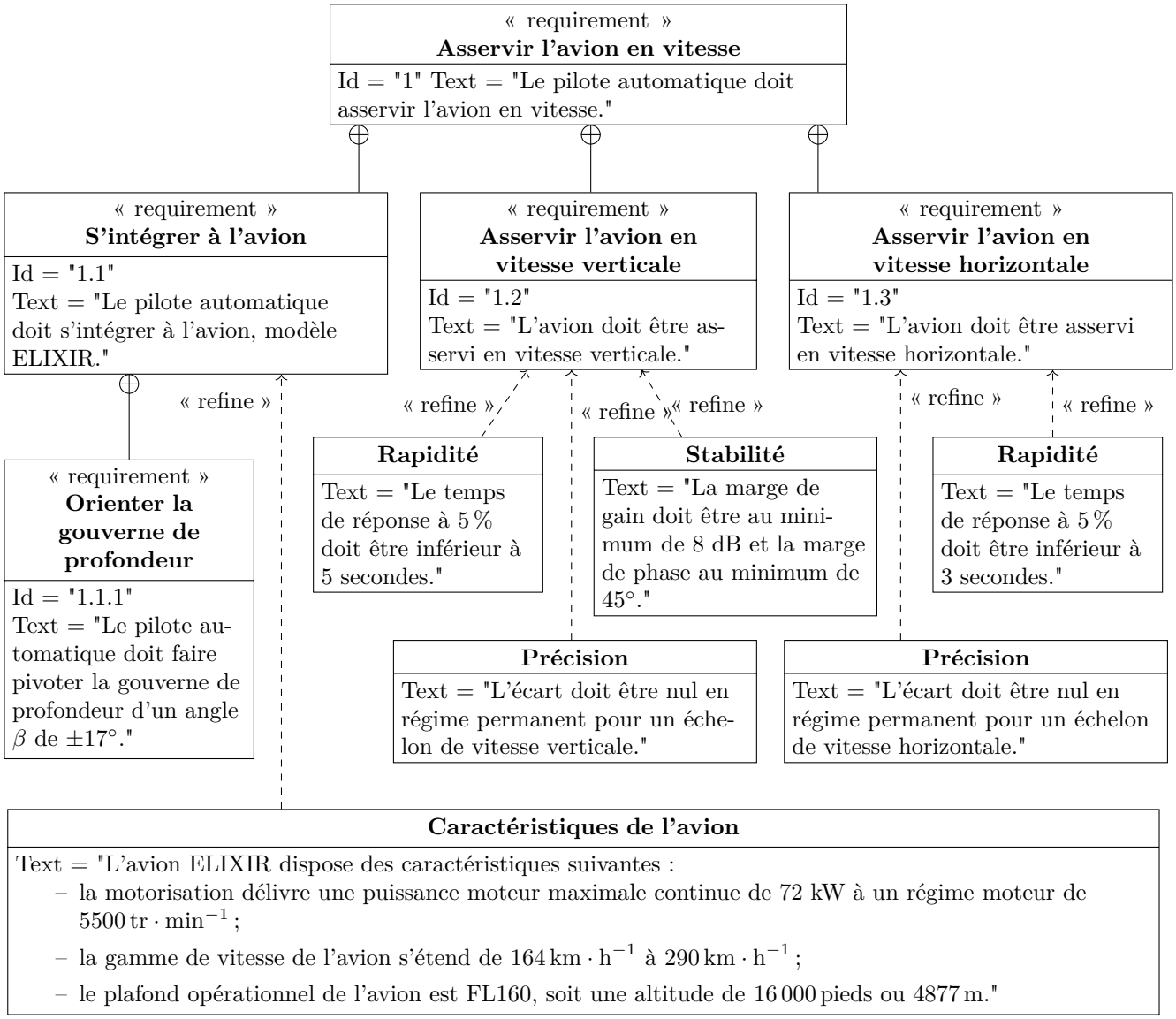


Figure 3 – Diagramme d'exigences pour l'asservissement de vitesse

Repères et paramétrage associés à l'avion

On définit (voir figure 4) les points G et B, respectivement centre de gravité de l'avion et centre de poussée de la gouverne de profondeur, et les repères suivants.

- $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère galiléen terrestre, O un point fixe et $\vec{z}_0$ la verticale descendante du lieu ;
- $R_A = (G, \vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$: repère aérodynamique tel que la vitesse de l'avion par rapport au repère terrestre soit $\vec{V}_{G,avion/R_0} = V(t)\vec{x}_A = V_x(t)\vec{x}_0 - V_z(t)\vec{z}_0$;
- $R_B = (G, \vec{x}_B, \vec{y}_B, \vec{z}_B)$: repère lié à l'avion ;
- $R_P = (B, \vec{x}_P, \vec{y}_P, \vec{z}_P)$: repère lié à la gouverne de profondeur.

Attention, au sens du vecteur $\vec{z}_0$ utilisé en aéronautique.

Dans le cas d'un vol symétrique, c'est-à-dire dans le cas où les plans $(G, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ et $(G, \vec{x}_B, \vec{z}_B)$ sont confondus, les paramètres de position de l'avion sont

- θ : l'assiette ou angle entre l'horizontale $\vec{x}_0$ et l'axe $\vec{x}_B$ de l'avion ;
- α : l'angle d'incidence ou angle $(\vec{x}_A, \vec{x}_B)$;
- γ : la pente ou angle entre $\vec{x}_0$ et le vecteur vitesse $\vec{V}_{G,avion/R_0}$;
- x, y, z les coordonnées du centre de gravité de l'avion par rapport à O l'origine du repère terrestre, tel que $\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 - z(t)\vec{z}_0$.

Par ailleurs $\beta = (\vec{x}_B, \vec{x}_P)$ représente l'angle d'inclinaison de la gouverne de profondeur (monobloc, en liaison pivot avec le fuselage) par rapport à l'avion.

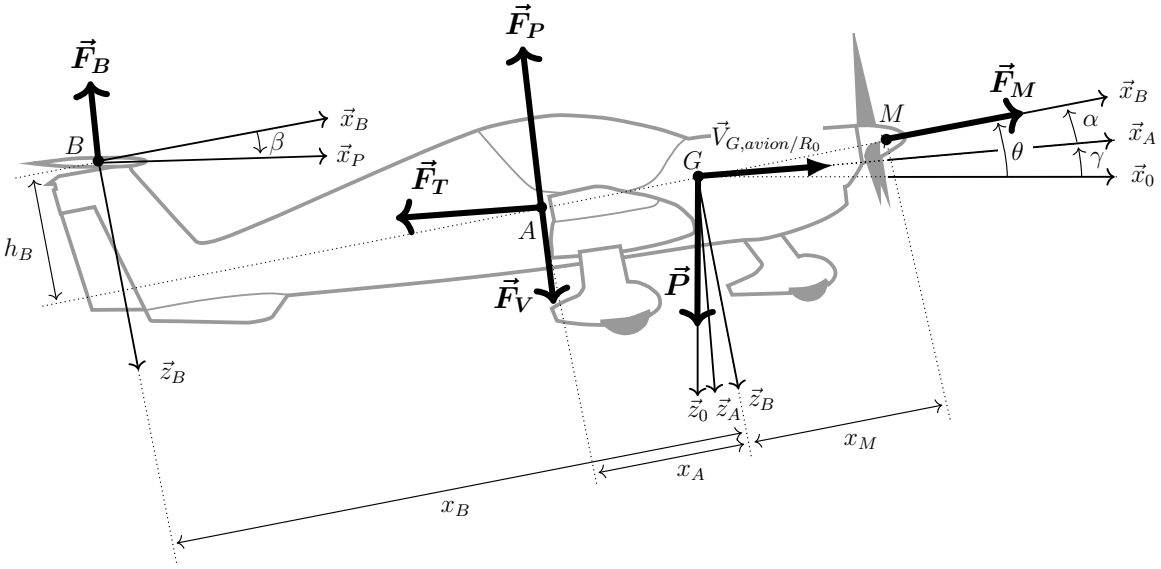


Figure 4 – Repère et paramétrage associé à l'avion

Les actions mécaniques qui s'appliquent sur l'avion sont

- le poids de l'avion s'exerçant au centre de gravité G : $\vec{P} = m\,g\vec{z}_0$ ($g = 9{,}81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) ;
- la force de propulsion de l'hélice s'exerçant au point M : $\vec{F}_M = F_M\vec{x}_B$;
- les forces aérodynamiques dues à la vitesse de l'avion qui s'exercent au foyer aérodynamique A des surfaces portantes (ailes et une partie du fuselage) qui se décomposent en deux composantes, une force de portance $\vec{F}_P$ et une force de trainée $\vec{F}_T$ dans le repère R_A :

$$\vec{F}_P = -\frac{1}{2}\rho(C_{z_0} + C_z\alpha)SV^2\vec{z}_A \quad , \quad \vec{F}_T = -\frac{1}{2}\rho(C_{x_0} + C_x\alpha)SV^2\vec{x}_A$$

  avec ρ la masse volumique de l'air, S une surface, C_{z_0}, C_z, C_{x_0} et C_x des coefficients aérodynamiques caractéristiques de l'avion ;
- la force de portance générée par la gouverne de profondeur au centre de poussée B (la force de trainée associée est négligée) où C_{p_0} et C_p sont des coefficients aérodynamiques caractéristiques de l'avion :

$$\vec{F}_B = -\frac{1}{2}\rho[C_{p_0} + C_p(\alpha + \beta)]SV^2\vec{z}_A$$

- une force perturbatrice qui s'exerce en A et aura pour conséquence une variation d'altitude (par exemple une rafale de vent, l'effet du sol lors d'un atterrissage...) : $\vec{F}_V = F_V\vec{z}_A$.

Enfin, les dimensions de l'avion permettent de définir les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{GA} = -x_A\vec{x}_B \quad , \quad \overrightarrow{GB} = -x_B\vec{x}_B - h_B\vec{z}_B \quad , \quad \overrightarrow{GM} = x_M\vec{x}_B$$

I – Vol de croisière : analyse du régime stationnaire

Objectif

Calculer le point de fonctionnement en régime permanent et vérifier s'il est atteignable au regard des capacités de l'avion.

La conception des lois de commande nécessite de définir un point de fonctionnement et les valeurs des différentes grandeurs associées autour de ce point (vol de croisière pour une vitesse de référence V_0 et une altitude choisies à priori).

En l'absence de vent, et dans le cas d'un vol stationnaire, l'avion vole à altitude et à vitesses constantes. Dans cette configuration, $F_V = 0\,\text{N}$, $V = V_x = V_0$, $V_z = 0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\beta = 0°$ et $\gamma = 0°$.

Q1. En appliquant le Principe Fondamental de la Statique à l'avion, projeté dans le repère aérodynamique R_A, déterminer la force de propulsion F_M en fonction de la vitesse V, de l'angle α, de la masse volumique de l'air ρ et des constantes caractéristiques de l'avion. Montrer également que la vitesse V vérifie une égalité en fonction uniquement de α, ρ et des constantes caractéristiques de l'avion.

Q2. Afin que l'avion soit en vol stationnaire, montrer que l'angle α doit vérifier une égalité particulière indépendante de la vitesse V de la forme :

$$1 + l_1 \tan\alpha + (l_2 + l_3 \tan\alpha)\alpha = 0$$

Donner les expressions des termes l_1, l_2 et l_3.

La masse volumique de l'air est un paramètre variant selon l'altitude. Pour la synthèse des lois de commande il est choisi d'utiliser la valeur $\rho = 0{,}8\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ correspondant à une altitude de croisière de 4000 m, pour laquelle les coefficients aérodynamiques prennent les valeurs suivantes :

$$C_{x0} = 0{,}066 \quad C_x = 0{,}26\,\text{rad}^{-1} \quad C_{z0} = 0{,}4 \quad C_z = 11{,}6\,\text{rad}^{-1} \quad C_{p0} = -0{,}045 \quad C_p = 1{,}08\,\text{rad}^{-1} \quad S = 8\,\text{m}^2$$

Pour une masse de l'avion $m = 630\,\text{kg}$, la résolution de l'équation obtenue question **Q2.** donne $\alpha = 0{,}84°$.

Q3. À partir des relations obtenues à la question **Q1.**, calculer la vitesse de croisière V_0 de l'avion et la force de propulsion F_{M0}. En argumentant la réponse, et compte tenu des capacités de l'avion précisées dans le diagramme d'exigences donné figure 3, déterminer si ce point de fonctionnement (V_0, F_{M0}) est atteignable.

On notera dans la suite, α_0 l'angle particulier donné précédemment, V_0 la vitesse de croisière et F_{M0} la force de propulsion associée.

II – Modèles dynamiques, non linéaire et linéaire, de l'avion

Objectif

Définir les modèles dynamiques de l'avion nécessaires à la synthèse et à la validation de la structure de commande du pilote automatique.

La démarche de synthèse et de validation des lois de commande repose sur un ensemble de modèles dynamiques de l'avion. Leur définition s'appuie sur les lois dynamiques régissant le comportement de l'avion autour du point de fonctionnement précédemment déterminé. Les équations dynamiques étant non linéaires, une linéarisation de ces équations sera proposée en se limitant à des développements à l'ordre 1.

Hypothèses : dans la suite, il est supposé que les variations des différentes grandeurs (vitesses, angles, etc.) sont faibles autour de leur position d'équilibre déterminée dans la partie I.

$$V_x = V_0 + \Delta V_x \quad ; \quad V_z = \Delta V_z \quad ; \quad \gamma = 0 + \Delta\gamma \quad ; \quad \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad ; \quad \beta = 0 + \Delta\beta \quad ; \quad F_M = F_{M0} + \Delta F_M$$

Les notations suivantes sont rappelées :

- vecteur position du centre de gravité de l'avion $\overrightarrow{OG} = x(t)\vec{x}_0 + y(t)\vec{y}_0 - z(t)\vec{z}_0$;
- vecteur vitesse de l'avion par rapport au repère terrestre $\vec{V}_{G,avion/R_0} = V(t)\vec{x}_A = V_x(t)\vec{x}_0 - V_z(t)\vec{z}_0$.

Q4. Déterminer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}_{G,avion/R_0} = \left[\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}_{G,avion/R_0}}{\mathrm{d}t}\right]_{R_0}$ de l'avion par rapport au référentiel galiléen exprimé dans le repère de l'avion R_A. Avec les hypothèses posées et en négligeant les termes d'ordre 2, en déduire une expression simple de ce vecteur accélération en fonction des dérivées temporelles de ΔV_x et ΔV_z.

Q5. Écrire les relations issues du théorème de la résultante dynamique (TRD) appliqué à l'avion, en projection dans le repère R_A.

Pour la suite, il est admis :

- la propriété $V^2 = V_x^2 + V_z^2$;
- l'équation issue de la question **Q1.** $F_{M0}\cos\alpha_0 - \dfrac{1}{2}\rho(C_{x_0} + C_x\alpha_0)SV_0^2 = 0$.

Q6. Avec les hypothèses et en négligeant les termes d'ordre 2, montrer que l'équation du TRD selon $\vec{x}_A$ vérifie une équation différentielle à coefficients constants de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\Delta V_x}{\mathrm{d}t} + a\Delta V_x = -g\Delta\gamma + b\Delta F_M - c\Delta\alpha \tag{1}$$

Donner les expressions de a, b, c en fonction de constantes caractéristiques de l'avion, de ρ, V_0, α_0 et F_{M0} uniquement.

Par une démarche identique, on peut montrer que l'équation du TRD selon $\vec{z}_A$ vérifie une équation différentielle à coefficients constants de la forme :

$$\frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}\Delta V_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Delta\gamma}{\mathrm{d}t} = d\Delta\alpha + e\Delta\beta + f\Delta V_x + h\Delta F_M - \frac{1}{mV_0}F_v \tag{2}$$

Q7. Avec les hypothèses posées et en négligeant les termes d'ordre 2, justifier la relation $\Delta V_z = V_0\Delta\gamma$.

Le comportement dynamique de l'avion est également régi par une équation complémentaire issue du théorème du moment dynamique appliqué à l'avion.

La matrice d'inertie au centre de gravité G de l'avion dans son repère R_B s'écrit :

$$\underline{\underline{I}}_{G,avion} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -I_4 \\ 0 & I_2 & 0 \\ -I_4 & 0 & I_3 \end{bmatrix}_{R_B}$$

Q8. Déterminer le moment dynamique en A de l'avion dans le repère R_0. En négligeant les termes d'ordre 2, simplifier cette expression.

Q9. En appliquant le théorème du moment dynamique à l'avion en A projeté sur l'axe $\vec{y}_0$, déterminer l'équation du mouvement sans chercher à linéariser cette dernière.

Avec les hypothèses du sujet, la relation obtenue à la question précédente peut être linéarisée, conduisant ainsi à une équation différentielle à coefficients constants :

$$I_2\frac{\mathrm{d}^2\Delta\gamma}{\mathrm{d}t^2} + k\frac{\mathrm{d}\Delta\gamma}{\mathrm{d}t} - r\Delta\gamma = -I_2\frac{\mathrm{d}^2\Delta\alpha}{\mathrm{d}t^2} - l\Delta\alpha - n\Delta\beta + o\frac{\mathrm{d}\Delta V_x}{\mathrm{d}t} - q\Delta V_x \tag{3}$$

III – Validation du modèle dynamique de l'avion

Les équations obtenues dans la partie II permettent d'établir deux modèles :

- un modèle dit **Non Linéaire**, découlant des relations du principe fondamental de la dynamique (PFD) avant simplifications avec les hypothèses du sujet ;
- un modèle dit **Linéarisé**, découlant des équations 1, 2 et 3.

Ces deux modèles sont exploités pour mettre en place un outil de simulation permettant d'obtenir les courbes données dans la figure 15 de l'annexe B. Sur cette figure, les évolutions des grandeurs de sortie (vitesses V_x et V_z) sont calculées pour une évolution trapézoïdale de l'angle de la gouverne de profondeur β (colonne de gauche) ainsi que pour une évolution en échelon de la force de propulsion ΔF_M (colonne de droite).

Q10. Au vu de ces courbes, commenter les écarts entre les modèles Non Linéaire et Linéarisé. Distinguer les régimes transitoires (fréquences propres, amortissements...) et permanents. Conclure sur le modèle à choisir pour la suite de l'étude.

Partie B – Étude de la chaine cinématique de la gouverne de profondeur

La partie précédente a permis d'établir que le changement d'altitude était piloté à partir de l'angle de la gouverne de profondeur β. Le pilotage de cet angle est réalisé par l'intermédiaire d'un servomoteur et d'un mécanisme dont le schéma cinématique et le paramétrage associé sont donnés en annexe C. À chacun des solides i est associé un repère R_i, la carlingue de l'avion étant le repère de référence R_B. Le rotor du servomoteur est lié au solide 3, tandis que la gouverne de profondeur est numérotée 8.

Objectif

Déterminer une loi linéaire liant l'angle du servomoteur θ_3 à l'angle de la gouverne de profondeur β.

Q11. À partir du schéma et du paramétrage donné en annexe C, proposer une démarche permettant de déterminer une relation entre θ_3 et l'angle de la gouverne de profondeur β. Aucun calcul n'est attendu à cette question.

Q12. En particulier, déterminer mathématiquement une relation liant les angles β et θ_6 en fonction des paramètres géométriques du mécanisme. La présenter sous la forme $L_7^2 = (\cdots)^2 + (\cdots)^2$.

Les expressions candidates n'étant pas linéaires, dans la suite il est proposé d'approcher la fonction $\theta_3 = f(\theta_1)$ numériquement par dichotomie. Il est défini pour cela les fonctions Python :

```
from math import *

def loi31(theta3, theta1):
    # Évalue la loi entrée sortie liant les angles theta3 et theta1 pour des valeurs particulières,
    # tel que loi31(theta3,theta1) = 0 si la loi est vérifiée.
    #
    return L2**2-(XD+L3*cos(theta3)-L1*cos(theta1))**2-(-YA+L3*sin(theta3)-L1*sin(theta1))**2

def dichotomie(f, y, xmin, xmax, epsilon):
    # Détermine la valeur de x qui vérifie f(x,y)=0 par dichotomie sur le domaine [xmin, xmax]
    # avec une précision de epsilon sur la valeur de x.

    x = 0.0
    # Code à proposer
    return x
```

Par exemple, l'utilisation de la fonction `dichotomie(loi31,-1.3,0,np.pi,1e-3)` renvoie la valeur `0.829117`.

Q13. Proposer, directement sur la copie, une procédure écrite en Python pour la fonction `dichotomie` dont la signature a été définie précédemment et permettant de déterminer la valeur numérique de θ_3 pour une valeur particulière de θ_1.

La courbe en figure 5, déterminée par dichotomie conformément à la démarche retenue à la **Q11.**, donne l'angle de la gouverne de profondeur β en fonction de l'angle du servomoteur θ_3 .

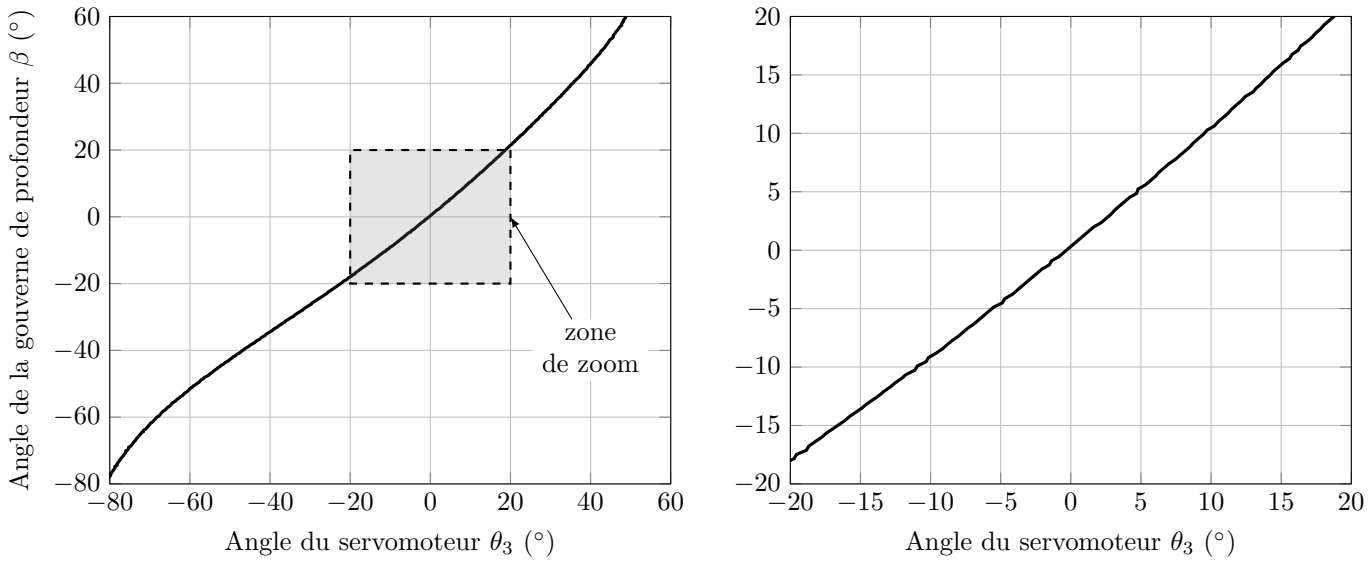


Figure 5 – Évolution de l'angle β en fonction de l'angle du servomoteur θ_3 (gauche) et détails (droite)

Q14. Au regard de la courbe en figure 5 et compte tenu du domaine de fonctionnement de l'avion, donner l'expression d'une loi linéaire approchée permettant de relier β à l'angle θ_3. Proposer un indicateur permettant de quantifier l'erreur de modèle commise.

Partie C – Réglage du pilote automatique

Les parties précédentes ont permis de déterminer un modèle dynamique de l'avion et un modèle cinématique liant l'angle de la gouverne de profondeur β à la position angulaire du rotor du servomoteur θ_3 du pilote automatique.

L'avion est équipé d'un ensemble de capteurs et d'une unité de traitement GARMIN GDU460 permettant de déterminer les commandes à envoyer aux servomoteurs.

Objectif

Régler les paramètres de la loi de commande et vérifier les performances de l'asservissement au regard des exigences du cahier des charges.

Il s'agira dans la suite de concevoir les correcteurs et de régler les différents paramètres des chaines d'asservissement des vitesses verticale et horizontale associées à la structure de commande du pilote automatique.

I – Définition des modèles pour la conception du pilote automatique

La phase de modélisation dynamique conduite dans la Partie A a permis d'aboutir à un système de trois équations différentielles linéaires couplées (1, 2 et 3).

Après avoir appliqué les transformées de Laplace à ces équations, elles deviennent :

$$\begin{aligned}
&(p+a)\Delta V_x(p) = -g\Delta\Gamma(p) + b\Delta F_M(p) - c\Delta\alpha(p)\\
&p\Delta\Gamma(p) = d\Delta\alpha(p) + e\Delta\beta(p) + f\Delta V_x(p) + h\Delta F_M(p) - \frac{1}{mV_0}F_v(p)\\
&(I_2p^2 + kp - r)\Delta\Gamma(p) = -(I_2p^2 + l)\Delta\alpha(p) - n\Delta\beta(p) + (op - q)\Delta V_x(p)
\end{aligned}$$

où $\Delta V_x(p)$, $\Delta\Gamma(p)$, $\Delta F_M(p)$, $\Delta\alpha(p)$, $\Delta\beta(p)$ et $F_v(p)$ sont les transformées de Laplace respectives des grandeurs temporelles $\Delta V_x(t)$, $\Delta\gamma(t)$, $\Delta F_M(t)$, $\Delta\alpha(t)$, $\Delta\beta(t)$ et $F_v(t)$.

En considérant que l'effort de perturbation $F_v(p)$ est nul, et en rappelant la relation $\Delta V_z(t) = V_0\Delta\gamma(t)$, le modèle dynamique linéarisé peut être représenté par quatre fonctions de transfert :

$$H_1(p) = \left[\frac{\Delta V_x(p)}{\Delta F_M(p)}\right]_{\Delta\beta(p)=0},\ H_2(p) = \left[\frac{\Delta V_z(p)}{\Delta F_M(p)}\right]_{\Delta\beta(p)=0},\ H_3(p) = \left[\frac{\Delta V_x(p)}{\Delta\beta(p)}\right]_{\Delta F_M(p)=0},\ H_4(p) = \left[\frac{\Delta V_z(p)}{\Delta\beta(p)}\right]_{\Delta F_M(p)=0}.$$

La structure de la régulation des vitesses horizontale et verticale de l'avion associée au modèle dynamique linéarisé peut ainsi être modélisé par le schéma-bloc donné sur la figure 6.

- $\Delta V_x^*(p)$ et $\Delta V_z^*(p)$ sont respectivement les variations de consigne des vitesses horizontale et verticale ;
- $C_{Hx}(p)$ et $C_{Hz}(p)$ sont les fonctions de transfert respectives des correcteurs pour les boucles d'asservissement en vitesse horizontale et verticale ;
- $\Delta F_M^*(p)$ est la variation de consigne de la force de propulsion et $\Delta F_M(p)$ est la variation réelle de la force de propulsion ;
- $H_m(p)$ est la fonction de transfert de l'ensemble de la chaine de propulsion ;
- $\Delta\beta^*(p)$ est la variation de consigne de l'angle de gouverne de profondeur et $\Delta\beta(p)$ est la variation de l'angle de la gouverne de profondeur ;
- K_t est le gain de la chaine cinématique de la gouverne de profondeur et $H_t(p)$ est la fonction de transfert de la motorisation associée.

Le schéma-bloc met en évidence **le couplage** entre les différentes variables et montre ainsi que $\Delta V_x(p)$ et $\Delta V_z(p)$ sont simultanément influencées par $\Delta V_x^*(p)$ et $\Delta V_z^*(p)$. Les hypothèses suivantes sont adoptées pour la suite :

- la fonction de transfert de la motorisation de la gouverne de profondeur, au vu de la technologie et de la rapidité de l'actionneur retenu, peut être considérée comme unitaire $H_t(p) = 1$;
- quels que soient les résultats obtenus dans la partie précédente, le gain de la chaine cinématique de la gouverne de profondeur est unitaire $K_t = 1$.

Le cahier des charges associé à cet asservissement est donné dans le diagramme d'exigences, figure 3.

II – Asservissement en vitesse verticale V_z

Objectif

Régler le correcteur de vitesse verticale V_z compte tenu de la dépendance entre les forces aérodynamiques et la vitesse de l'avion.

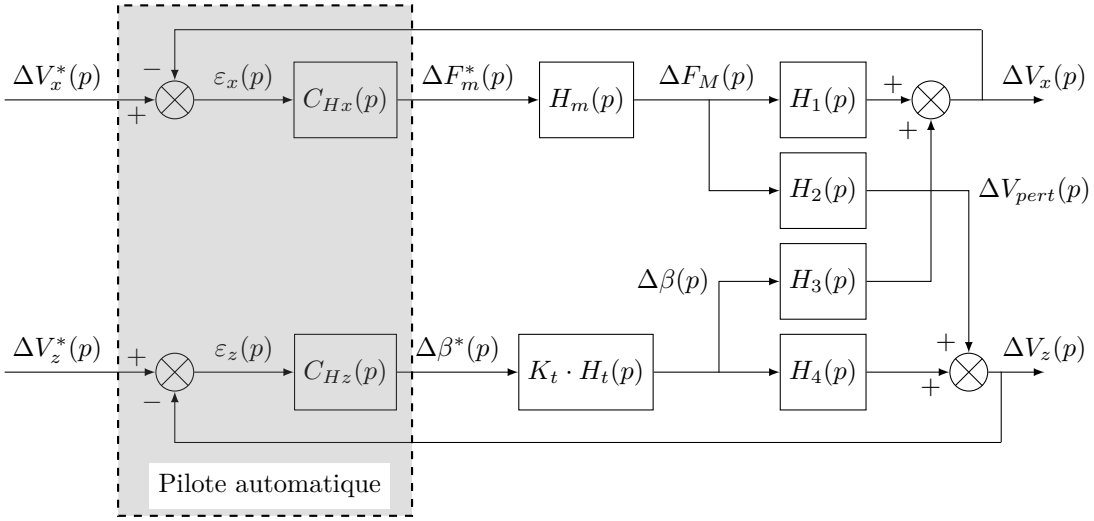


Figure 6 – Schéma-bloc couplé de l'asservissement des vitesses horizontale et verticale

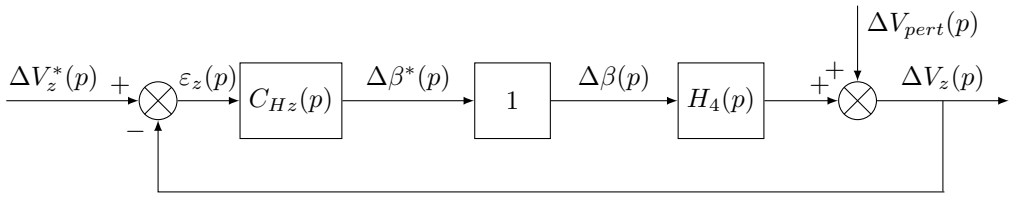


Figure 7 – Boucle de vitesse verticale linéarisée et découplée

Dans un premier temps, seul l'asservissement en vitesse verticale est pris en compte, en exploitant le modèle linéarisé et en supposant que la variation de vitesse verticale est découplée. L'effet du couplage est ainsi assimilé dans ce cas à un signal perturbateur extérieur $\Delta V_{pert}(p)$. La boucle d'asservissement est alors représentée par le schéma-bloc de la figure 7.

La structure du correcteur est de type proportionnel intégral de fonction de transfert $C_{Hz}(p) = K_z\left(1 + \dfrac{1}{\tau_z p}\right)$, avec $K_z < 0$.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_4(p)$ est donné sur la figure 8. Le temps de réponse à 5 % attendu pour la boucle d'asservissement de la vitesse verticale est d'environ 5 secondes. L'exploitation des relations approchées usuelles liant la pulsation de coupure à 0 dB et le temps de réponse en boucle fermée permet de restreindre la plage d'étude fréquentielle au voisinage de $1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Le calcul des paramètres du correcteur sera alors effectué dans l'intervalle $[0{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}; 5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]$.

Pour la détermination de τ_z, une expression approchée $\tilde{H}_4(p)$ de $H_4(p)$ est envisagée ainsi que l'utilisation de l'approximation $\omega_c t_r \simeq 3$, où ω_c est la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte et t_r le temps de réponse à 5 % en boucle fermée.

Q15. Montrer, à partir du diagramme de Bode de la fonction $H_4(p)$ donné sur la figure 8, que la fonction $H_4(p)$ peut être assimilée à une fonction de la forme $\tilde{H}_4(p) = -\dfrac{K_{4a}}{p}$, avec $K_{4a} > 0$, dans l'intervalle de pulsations retenu. Donner la valeur de K_{4a}.

Q16. Préciser sous forme littérale la fonction de transfert en boucle ouverte en adoptant la forme approchée $\tilde{H}_4(p)$. Justifier la valeur négative retenue pour K_z.

Q17. Déterminer, à partir de l'expression de la fonction de transfert de la boucle ouverte, l'expression que doit vérifier τ_z afin de répondre au critère de marge de phase du cahier des charges au regard du temps de réponse souhaité. Faire l'application numérique.

Q18. En conservant la valeur de τ_z déterminée à la question **Q17.** déterminer l'expression de K_z permettant de vérifier les critères de marge de phase et de rapidité du cahier des charges. Faire l'application numérique.

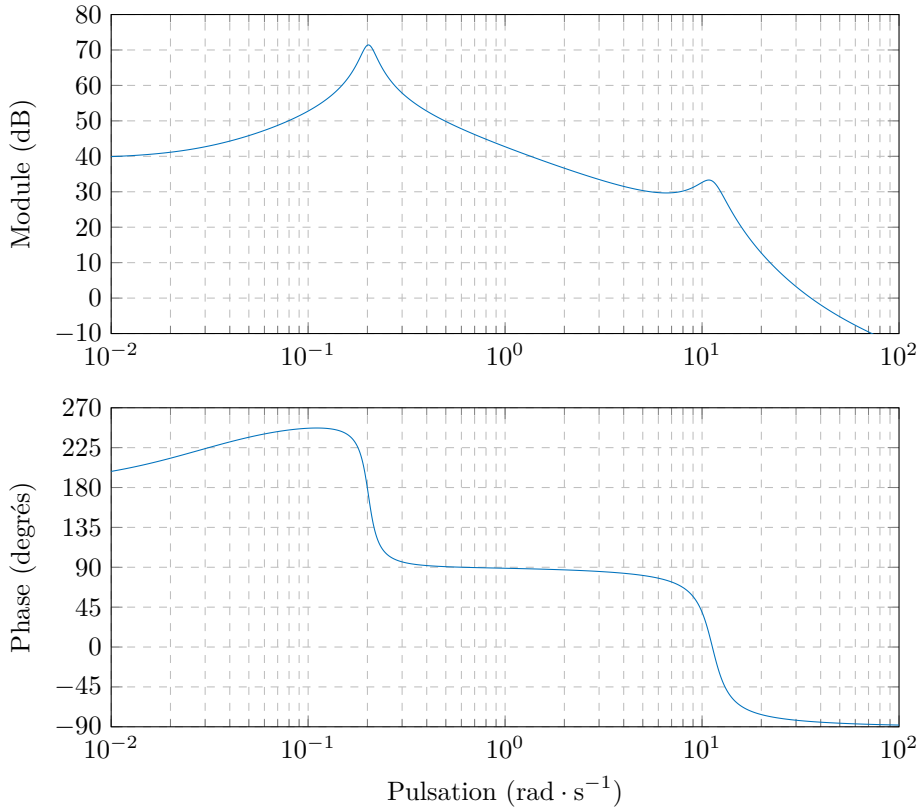


Figure 8 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_4(p)$

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée établi à partir de la fonction $H_4(p)$ et du correcteur $C_{Hz}(p)$ déterminé aux questions précédentes est donné sur la figure 9.

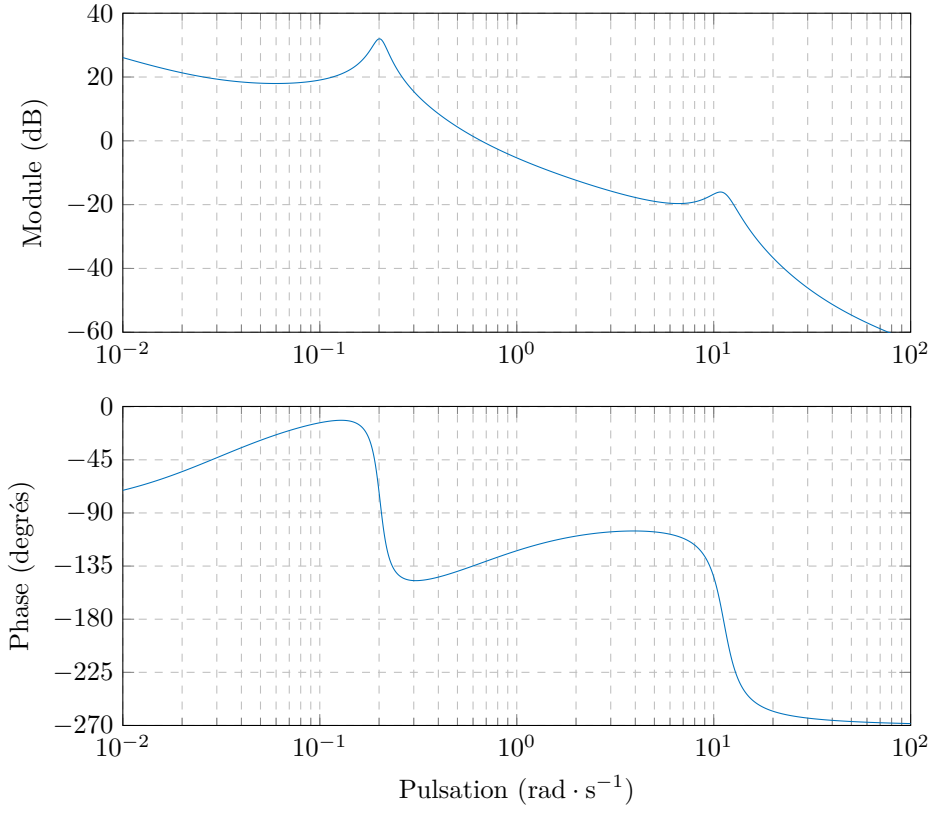


Figure 9 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée

Q19. Déterminer, à partir de ce diagramme de Bode, les marges de gain et de phase. Conclure quant à la pertinence de la loi de commande déterminée pour l'asservissement de la vitesse verticale V_z.

III – Asservissement en vitesse horizontale V_x

III.1 – Fonction de transfert représentative pour la chaine d'asservissement de vitesse horizontale V_x

Objectif

Exprimer une fonction de transfert simplifiée de la boucle ouverte de l'asservissement de vitesse horizontale, utilisable dans le cadre de la synthèse du correcteur de cette même boucle.

Pour la synthèse du correcteur de la chaine d'asservissement horizontale il est envisagé d'utiliser un modèle simplifié issu de la réduction du schéma-bloc couplé donné à la figure 6 de façon à considérer $\Delta V_x^*(p)$ comme la consigne de variation de vitesse horizontale et d'assimiler $\Delta V_z^*(p)$ à une perturbation.

La boucle d'asservissement de la variation de vitesse verticale linéarisée et découplée est représentée sous forme de schéma-bloc sur la figure 7.

Q20. Exprimer la fonction de transfert de la boucle fermée de l'asservissement de vitesse verticale découplée, notée $H_{BFv_z}(p)$, en fonction de $H_4(p)$ et $C_{Hz}(p)$.

Dans le cadre de l'étude de l'asservissement de ΔV_x, le schéma bloc de la figure 6 peut se ramener sous la forme du schéma bloc intermédiaire de la figure 10.

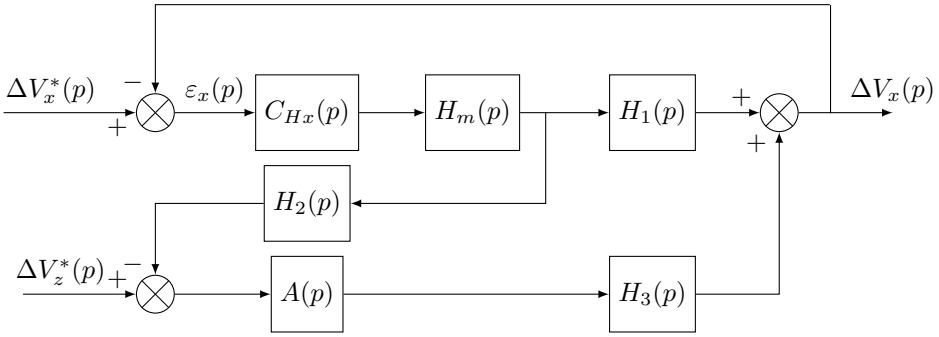


Figure 10 – Schéma-bloc intermédiaire

Q21. Déterminer l'expression de $A(p)$ en fonction de $H_4(p)$ et $H_{BFv_z}(p)$ permettant le passage du schéma bloc de la figure 6 au schéma bloc de la figure 10.

Q22. Montrer enfin, à partir de la forme précédente donnée figure 10, que le schéma-bloc couplé peut se mettre sous la forme de la figure 11. Donner l'expression de $B(p)$ en fonction de $H_4(p), H_2(p), H_3(p)$ et $H_{BFv_z}(p)$.

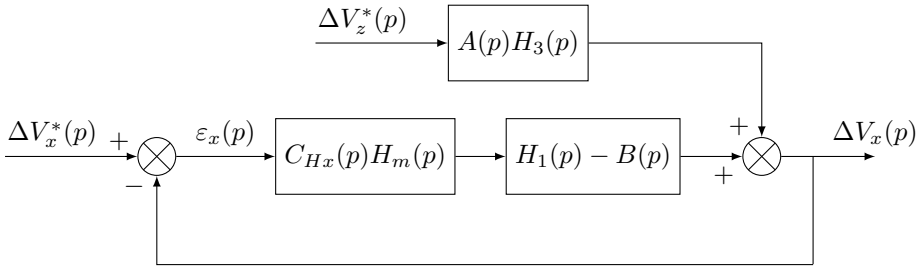


Figure 11 – Boucle de vitesse horizontale perturbée

Le schéma-bloc mis sous la forme de la figure 11 permet ainsi d'exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de vitesse horizontale $H_{BOv_x}(p) = \dfrac{\Delta V_x(p)}{\varepsilon_x(p)}$:

$$H_{BOv_x}(p) = C_{Hx}(p)H_m(p)\left(H_1(p) - B(p)\right)$$

Le temps de réponse à 5% attendu pour la boucle d'asservissement de la vitesse horizontale est d'environ 3 secondes. En conséquence, dans le cadre du réglage du correcteur, le modèle de la caractéristique fréquentielle du système au

voisinage de $1\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, plus précisément entre $0{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, sera plus particulièrement considéré.

La figure 16, annexe D, représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H_1(p) - B(p)$.

Q23. Déterminer une expression numérique simplifiée de $H_1(p) - B(p)$, notée $\tilde{H}_1(p)$, sous la forme $\tilde{H}_1(p) = \dfrac{K_{1a}}{p}$ ($K_{1a} > 0$), utilisable pour le réglage du correcteur de la boucle de variation de vitesse horizontale.

III.2 – Synthèse du correcteur de la boucle de vitesse horizontale V_x

Objectif

Déterminer les paramètres d'un correcteur permettant à la boucle d'asservissement de la vitesse horizontale d'atteindre les objectifs fixés par le cahier des charges fonctionnel.

L'architecture de correcteur retenue pour la boucle de vitesse horizontale est de type proportionnel intégral de fonction de transfert $C_{Hx}(p) = K_x\left(1 + \dfrac{1}{\tau_x p}\right)$.

En phase de vol, le modèle de comportement du groupe de propulsion est approché par celui d'une fonction du premier ordre de gain statique unitaire et de constante de temps 0,01 s :

$$H_m(p) = \frac{1}{1 + 0{,}01p}$$

Q24. Justifier que, dans l'intervalle de pulsations retenu pour le réglage du correcteur, la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de vitesse horizontale $H_{BOv_x}(p)$ peut se mettre sous la forme $H_{BOv_x}(p) = C_{Hx}(p)\tilde{H}_1(p)$.

Q25. À partir du schéma-bloc simplifié donné en figure 11, en considérant que $H_1(p) - B(p) = \tilde{H}_1(p) = \dfrac{K_{1a}}{p}$, déterminer l'expression littérale sous forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée de la régulation de vitesse horizontale $H_{BFv_x}(p) = \dfrac{\Delta V_x(p)}{\Delta V_x^*(p)}$, en fonction de K_{1a}, K_x et τ_x. Conclure quant à la stabilité de la boucle fermée de vitesse horizontale.

Q26. Écrire $H_{BFv_x}(p)$ sous une forme $H_{BFv_x}(p) = X(p) + Tp \cdot X(p)$ et donner l'expression de T.

Q27. Exprimer les paramètres caractéristiques de $X(p)$: pulsation propre ω_0 et coefficient d'amortissement ξ. Donner l'expression de K_x en fonction de K_{1a} et τ_x, afin que la réponse indicielle de $X(p)$ soit la plus rapide possible, sans dépassement.

La figure 12 donne l'abaque du temps de réponse réduit pour les systèmes du deuxième ordre.

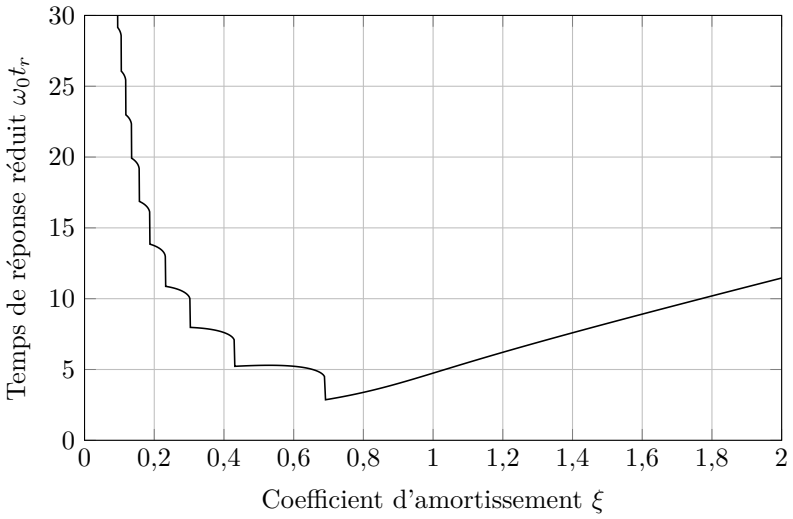


Figure 12 – Abaque du temps de réponse réduit pour les systèmes du deuxième ordre

Q28. Donner la valeur de τ_x pour que le temps de réponse à 5 % de la réponse indicielle de $X(p)$ soit de 3 s. En déduire la valeur de K_x.

La figure 17 de l'annexe D représente le tracé de la réponse indicielle de la fonction

$$\frac{\tau_x p}{1+\tau_x p+\dfrac{\tau_x}{K_{1a}K_x}p^2} = Tp \cdot X(p)$$

Q29. Tracer sur la copie la réponse indicielle de $X(p)$ en justifiant la construction de la courbe. À l'aide de la figure 17 de l'annexe D, la compléter avec le tracé de la réponse indicielle de $H_{BFv_x}(p)$. Commenter l'influence du zéro de $H_{BFv_x}(p)$ sur le comportement temporel.

Partie D – Synthèse

I – Robustesse des asservissements en vitesse

Objectif

Valider les performances globales après implémentation des réglages précédents dans le système de commande du pilote automatique.

Pour valider la loi de commande étudiée précédemment il est utilisé un simulateur non linéaire exploitant les modèles dynamiques, couplés, définis précédemment et les correcteurs synthétisés. Une simulation est réalisée sur un intervalle de temps de 50 s au cours duquel les variations de vitesses horizontale et verticale de l'avion sont relevées autour d'un point de fonctionnement défini par $V_x(t=0) = 60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $V_z(t=0) = 0$. L'altitude initiale est $z(t=0) = 4000\,\mathrm{m}$ et :

- à $t = 10\,\mathrm{s}$ est imposé un échelon de variation de vitesse horizontale d'amplitude $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$;
- à $t = 30\,\mathrm{s}$ est imposé un échelon de variation de vitesse verticale d'amplitude $-3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Les évolutions des vitesses horizontale et verticale de l'avion sont données figure 13.

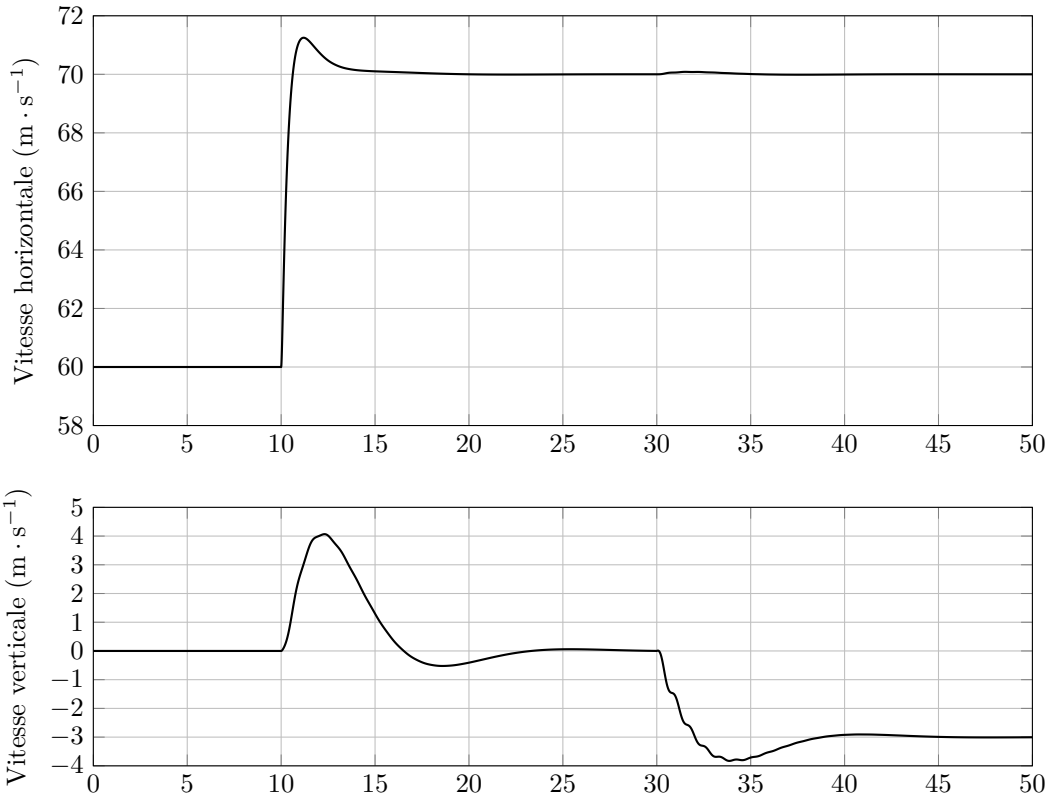


Figure 13 – Évolutions des vitesses horizontale et verticale obtenues en simulation numérique avec le modèle non linéaire

Q30. À partir des résultats figure 13, commenter les performances des asservissements des vitesses verticale et horizontale. Est-il possible de considérer le comportement de l'avion en fonctionnement « pilote automatique » comme découplé ?

II – Sensibilité du système aux variations de la masse volumique de l'air

Objectif

Quantifier la sensibilité du système aux variations d'un paramètre extérieur : la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude. Vérifier la robustesse vis-à-vis de la variation de ce paramètre.

La masse volumique de l'air, de par son rôle dans les forces aérodynamiques, est un paramètre important pour la modélisation du comportement dynamique de l'avion et pour le réglage du système de commande. Le calcul des paramètres des correcteurs a été effectué en considérant une masse volumique de l'air égale à $0{,}8\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, valeur mesurée à l'altitude de croisière. Étant donné la forte variation de cette valeur avec l'altitude, il est judicieux d'étudier la sensibilité des performances de la loi de commande vis-à-vis de la masse volumique de l'air, de $1{,}22\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ au niveau du sol, à $0{,}4\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ à une altitude de 10 000 m, supérieure à l'altitude maximale autorisée de l'avion.

Pour cela les modèles en boucle fermée sont déterminés pour différentes valeurs de masse volumique de l'air $\rho \in [0,4\ ;\ \cdots\ ;1,22]\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. De cette étude découle l'évolution des pôles du système {avion + pilote automatique}, visible sur le graphique de la figure 14 (cette courbe est appelée lieu des pôles), selon l'évolution de la valeur de masse volumique de l'air.

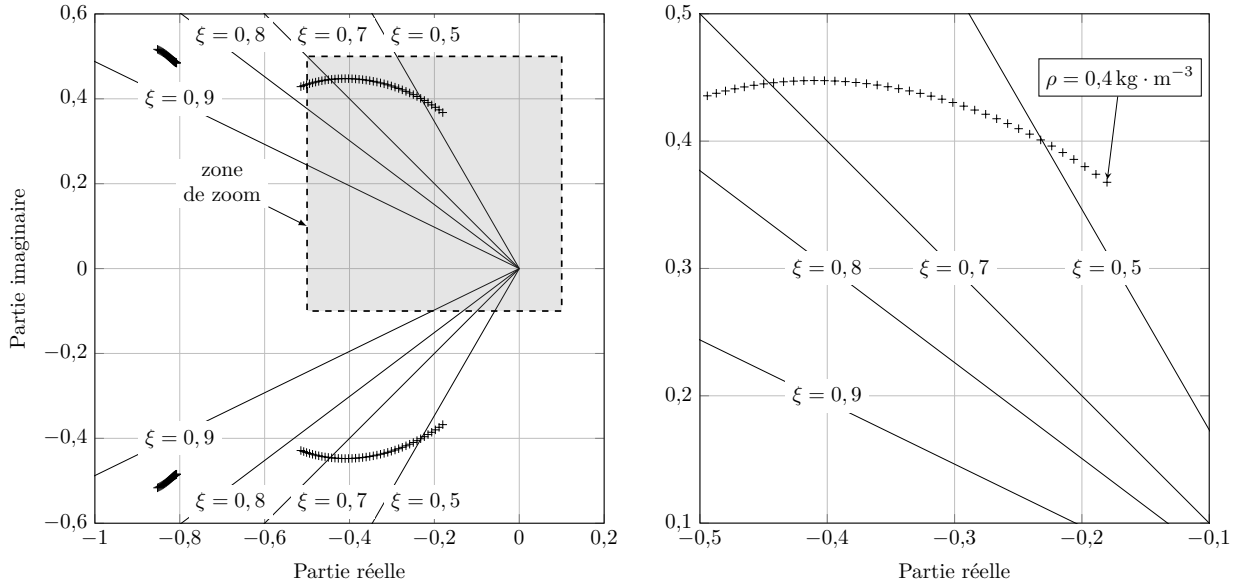
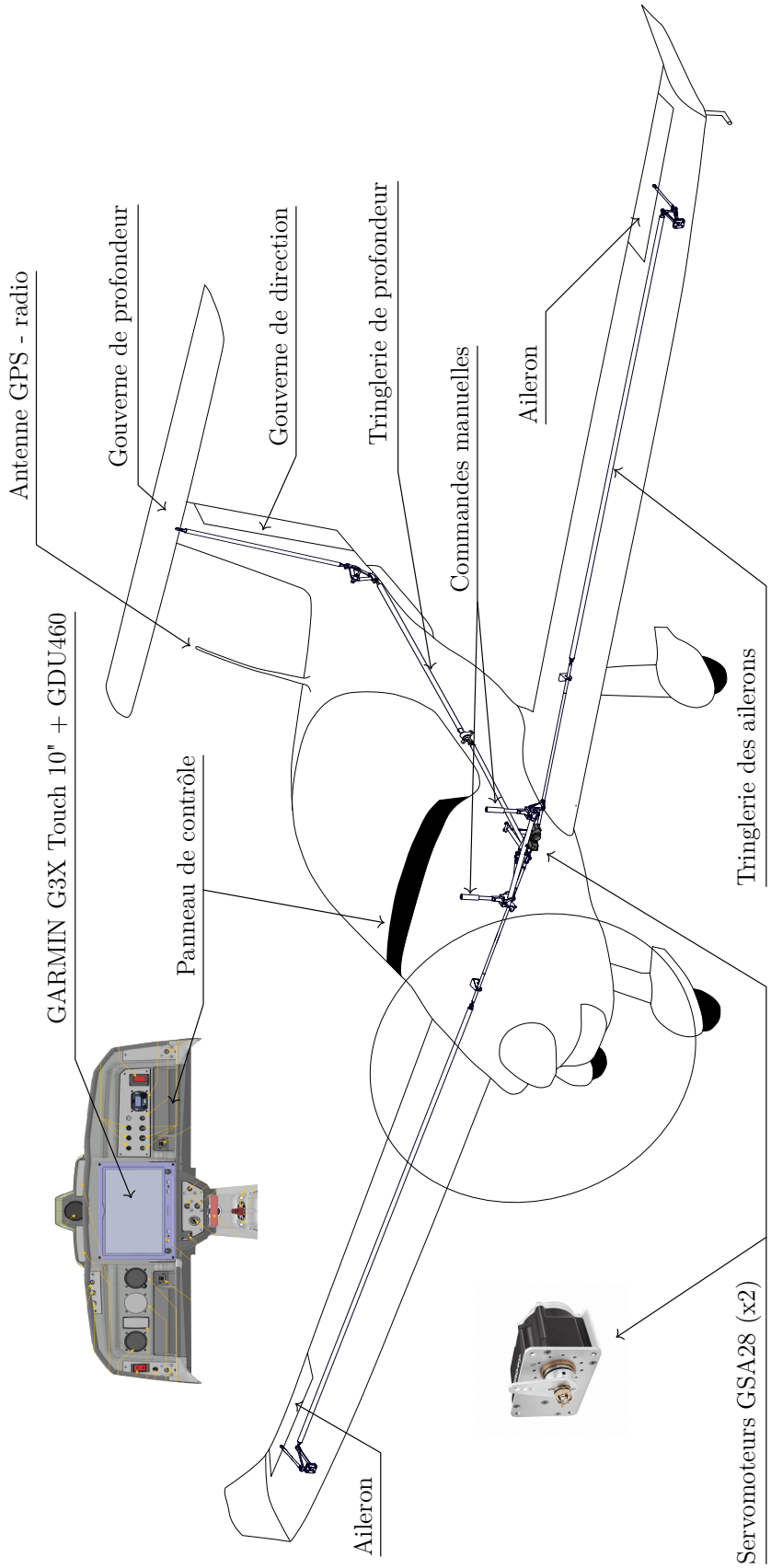


Figure 14 – Lieu des pôles du système {avion + pilote automatique} selon la valeur de masse volumique de l'air (gauche) et détails (droite)

Sur la figure 14 le lieu des pôles est représenté par des croix. Le lieu contient les pôles calculés pour une masse volumique de l'air allant de $1{,}22\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ à $0{,}4\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ avec un pas de $0{,}02\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Les droites obliques sont appelées lignes iso-amortissement. Chaque paire de droites correspond au lieu des pôles d'un système du deuxième ordre avec $\xi \in \{0,5\ ;\ 0,7\ ;\ 0,8\ ;\ 0,9\}$.

Q31. En analysant la figure 14, commenter l'évolution du comportement de l'avion en fonction de l'altitude. Proposer des solutions afin de garantir un meilleur comportement global quelle que soit l'altitude.

Annexe A Architecture de l'avion et termes techniques associés



Annexe B Comparaison des réponses des modèles Non Linéaire et Linéarisé

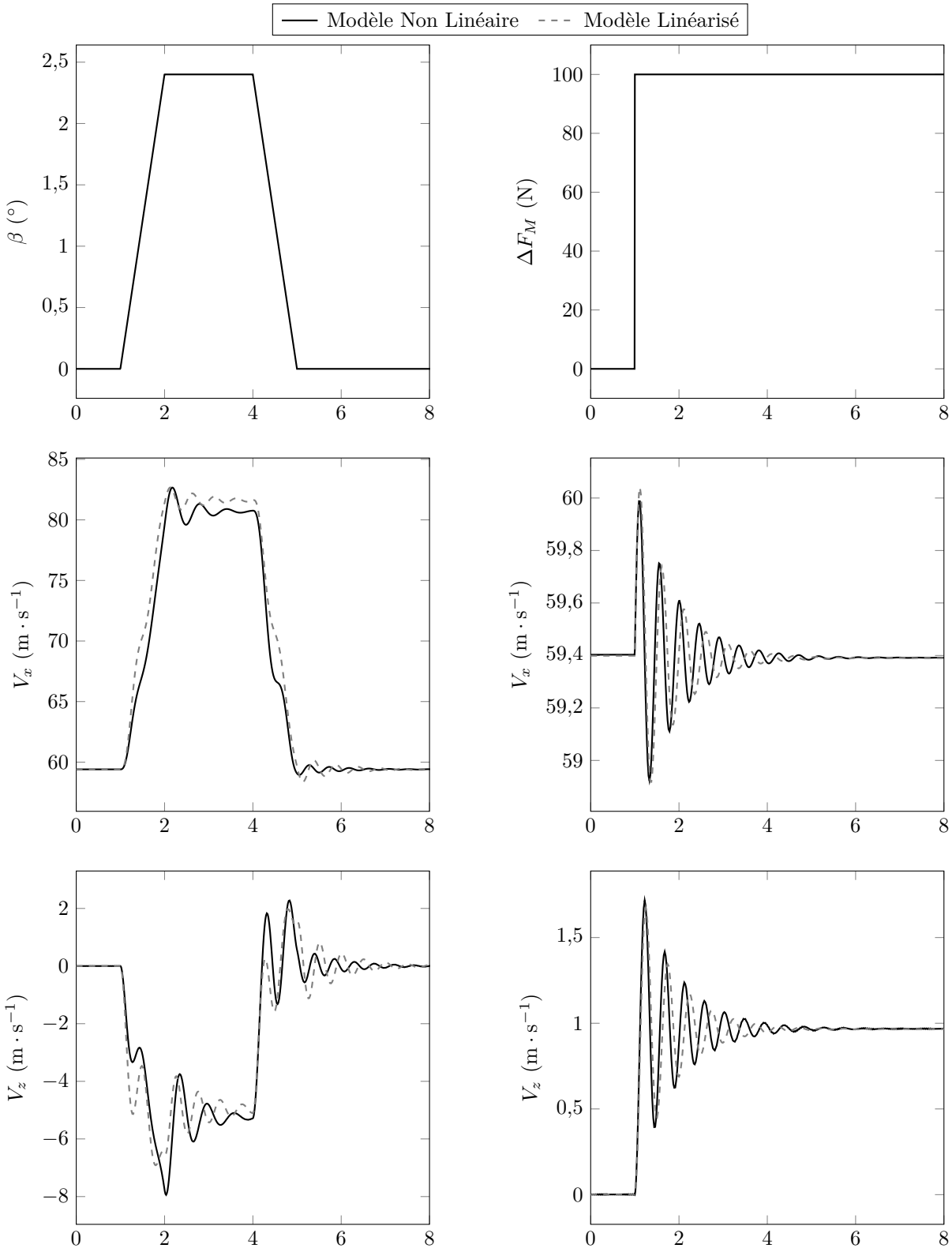


Figure 15 – Comparaison des modèles Non Linéaire (NL) et Linéarisé (L) en fonction des entrées β (gauche) et ΔF_m (droite)

Annexe C Schéma cinématique du mécanisme d'orientation de la gouverne de profondeur

$\overrightarrow{OA} = (0;\ Y_A;\ 0)_{R_B}$ $\quad \overrightarrow{OD} = (X_D;\ 0;\ 0)_{R_B}$ $\quad \overrightarrow{OF} = (X_F;\ Y_F;\ 0)_{R_B}$ $\quad \overrightarrow{OH} = (X_H;\ Y_H;\ 0)_{R_B}$ $\quad \overrightarrow{OL} = (X_L;\ Y_L;\ 0)_{R_B}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = L_1$ $\quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = L_2$ $\quad \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = L_3$ $\quad \left\|\overrightarrow{BE}\right\| = L_4$ $\quad \left\|\overrightarrow{EG}\right\| = L_5$ $\quad \left\|\overrightarrow{HG}\right\| = L_6 = \left\|\overrightarrow{HJ}\right\|$ $\quad \left\|\overrightarrow{JK}\right\| = L_7$ $\quad \left\|\overrightarrow{LK}\right\| = L_8$ $\quad \left\|\overrightarrow{FE}\right\| = \lambda_5(t)$

$(\vec{x}_B,\ \vec{x}_1) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_1) = \theta_1(t)$ $\quad (\vec{x}_B,\ \vec{x}_2) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_2) = \theta_2(t)$ $\quad (\vec{x}_B,\ \vec{x}_3) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_3) = \theta_3(t)$ $\quad (\vec{x}_B,\ \vec{x}_4) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_4) = \theta_4(t)$

$(\vec{x}_B,\ \vec{x}_5) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_5) = \theta_5(t)$ $\quad (\vec{x}_B,\ \vec{x}_6) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_6) = \theta_6(t)$ $\quad (\vec{x}_B,\ \vec{x}_7) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_7) = \theta_7(t)$ $\quad (\vec{x}_B,\ \vec{x}_8) = (\vec{y}_B,\ \vec{y}_8) = \beta(t)$

$$(\vec{x}_6,\ \vec{x}_{6'}) = (\vec{y}_6, \vec{y}_{6'}) = \frac{\pi}{6}$$

Annexe D Réponses fréquentielle et temporelle de la boucle d'asservissement de la vitesse horizontale V_x

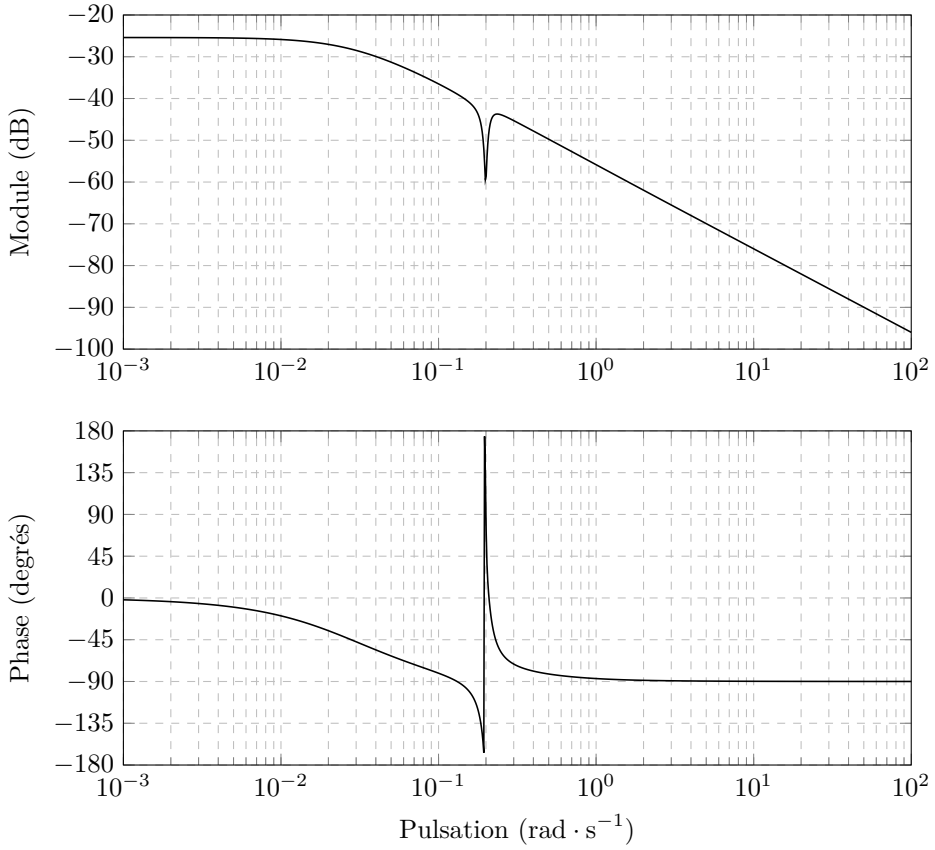


Figure 16 – Diagramme de Bode de $H_1(p) - B(p)$

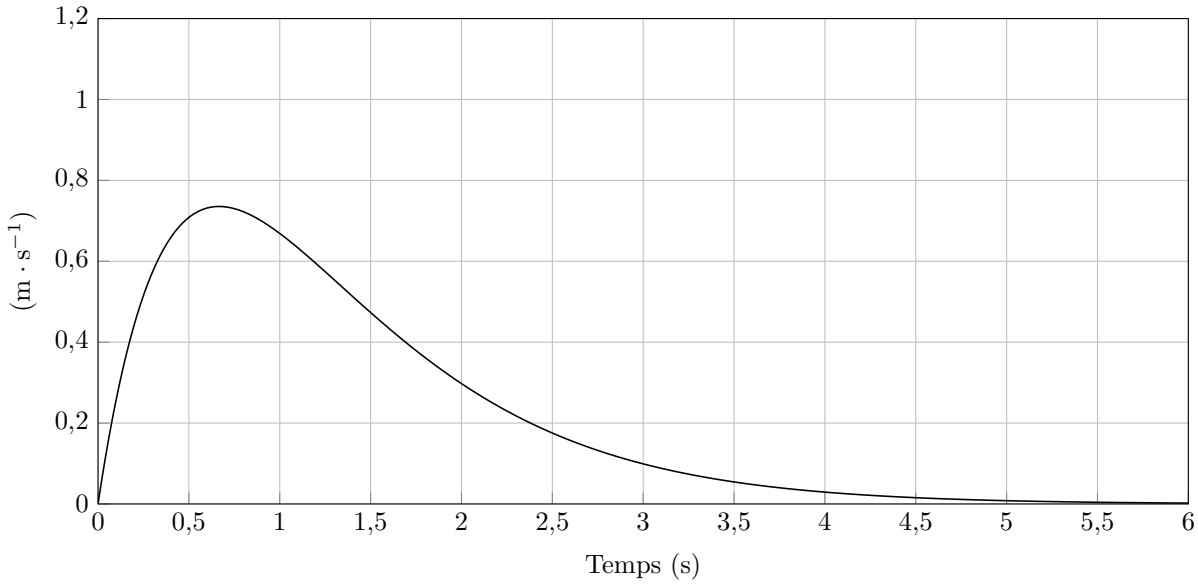


Figure 17 – Réponse indicielle de $Tp \cdot X(p)$

◇ Fin ◇

S025 - 12 janvier 2025 - 22:25:17

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Cinématique des mécanismes : composition des mouvements, contact ponctuel, lois entrée-sortie et fermetures
- Amplificateur linéaire intégré, stabilité et rétroaction
- Filtrage linéaire
- Régimes transitoires
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi