Concours Centrale-Supélec, France

Session 2008, filière TSI

Sciences industrielles 1

Ce que traite le sujet

- Partie I : performances en déplacements de la nacelle et chaîne de mesure
- Partie II : moment d'inertie ramené à l'arbre moteur et couple moteur
- Partie III : asservissement en position de la tige du vérin et bande passante

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années : prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2008/si1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR I

Calculatrices autorisées.

Présentation

Le support de l'étude proposée est la plate-forme hexapode (voir figure 1) fabriquée par la société Symétrie pour le laboratoire de mécanique des fluides de l'École Centrale de Nantes. Cette plate-forme permet le développement de deux thèmes de recherche :



Figure 1 : la plate-forme hexapode

- La mesure des coefficients hydrodynamiques de navires ou d'engins flottants. Les résultats obtenus concourent alors à la modélisation des comportements dans la houle et la validation de nouveaux concepts de sécurité.
- L'étude des efforts provoqués par le mouvement des liquides sur les parois intérieures d'une cuve ou d'un réservoir partiellement remplis, ceux-ci étant eux-mêmes en mouvement. Cette étude concerne particulièrement les navires tels que les pétroliers ou méthaniers mais aussi les véhicules de transports routiers, ferroviaires et aériens. Elle se fait en montant sur la plate-forme une maquette respectant des règles de similitude.

Plus généralement l'intérêt de ce type de robots, à six degrés de liberté, réside principalement dans son aptitude à des manipulations précises impliquant de lourdes charges et/ou des vitesses importantes. Pour l'étude envisagée dans la suite de ce sujet, une maquette (représentative d'une cuve de méthanier) est fixée rigidement sur la plate-forme mobile. Une platine de mesure des efforts exercés sur la maquette est montée entre la maquette et la plate-forme mobile : elle n'intervient pas dans l'étude proposée.

Filière TSI

Le système en exploitation (banc hexapode) est composé des éléments suivants :

- la partie opérative (la plate-forme hexapode) qui se compose :
  - d'une plate-forme fixe (base), notée $\boldsymbol{S}_0$;
  - d'une plate-forme mobile (nacelle), notée $\boldsymbol{S}_1$;
  - de six ensembles nommés « vérin » montés en parallèle entre les deux précédentes plates-formes. Le vérin est de type « vérin électrique », l'entraînement étant assuré par un moteur « brushless ». Les liaisons de chaque vérin avec les plates-formes fixe et mobile sont respectivement réalisées par un joint de Cardan, et, le montage en série d'une butée à billes et d'un joint de Cardan ;
- la partie commande qui est constituée par une armoire de puissance et de commande ; un ordinateur permet le pilotage de l'ensemble (Voir document 1 page 12/12).

La fonction globale de ce système est obtenue par conjugaison de plusieurs fonctions de base, celles-ci étant réalisées par un ou plusieurs sous-ensembles du système.

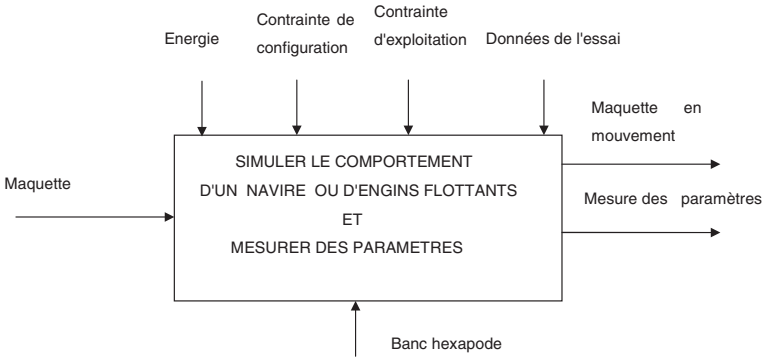


Figure 2 : schéma fonctionnel

L'étude proposée porte sur l'asservissement en position de chacun des vérins. Elle comporte trois parties indépendantes qu'il est cependant conseillé de traiter dans l'ordre proposé :

Première partie : détermination des performances en déplacements de la nacelle, détermination des performances de la chaîne de mesure de la position.

Deuxième partie : détermination du moment d'inertie ramené à l'arbre moteur et calcul du couple moteur (pour un vérin).

Troisième partie : modélisation de l'asservissement en position de la tige du vérin et détermination de sa bande passante.

Partie I - Détermination des performances en déplacements de la nacelle, détermination des performances de la chaîne de mesure de position

I.A - Détermination des performances en déplacements de la nacelle

Objectif : vérifier partiellement la conformité de la plate-forme aux prescriptions suivantes du cahier des charges.

Direction	Translation	Rotation
$\vec{X}$	±465 mm ($f < 3$ Hz)	±32° ($f < 2$ Hz)
$\vec{Y}$	±465 mm ($f < 3$ Hz)	±28° ($f < 2$ Hz)
$\vec{Z}$	±300 mm ($f < 3$ Hz)	±44° ($f < 1,5$ Hz)

Pour cela on évalue successivement pour les directions $\vec{Z}$ ou $\vec{X}$ l'amplitude du déplacement de la nacelle ainsi que certaines limites résultant de la nature des liaisons d'un vérin avec la base ou ayant trait au fonctionnement de la plate-forme.

Données et notations

- L'épure de la figure 3 précise les caractéristiques géométriques de $\boldsymbol{S}_0$ et de $\boldsymbol{S}_1$ notamment en ce qui concerne les symétries dont il sera tenu compte.
- La plate-forme fixe (base) est notée $\boldsymbol{S}_0$, le repère orthonormé $(O_F, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ attaché à $\boldsymbol{S}_0$ est galiléen. Chaque vérin est lié à $\boldsymbol{S}_0$ en A_i $(i = 1 \ldots 6)$ sur un cercle de rayon $R = 0,875$ m et de centre O_F. L'angle tel que $(\overrightarrow{O_F A_1}, \overrightarrow{O_F A_2})$ est égal à 2α. On donne $2\alpha = 15°$. Les côtés tels que $A_6 A_1$ appartiennent à un triangle équilatéral centré en O_F.
- La plate-forme mobile (nacelle) est notée $\boldsymbol{S}_1$, le repère $(O_M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est attaché à $\boldsymbol{S}_1$. Chaque vérin est lié à $\boldsymbol{S}_1$ en B_i $(i = 1 \ldots 6)$ sur un cercle de rayon $r = 0,475$ m et de centre O_M. L'angle tel que $(\overrightarrow{O_M B_1}, \overrightarrow{O_M B_2})$ est égal à 2β. On donne $2\beta = 20°$. Les côtés tels que $B_6 B_1$ appartiennent à un triangle équilatéral centré en O_M.

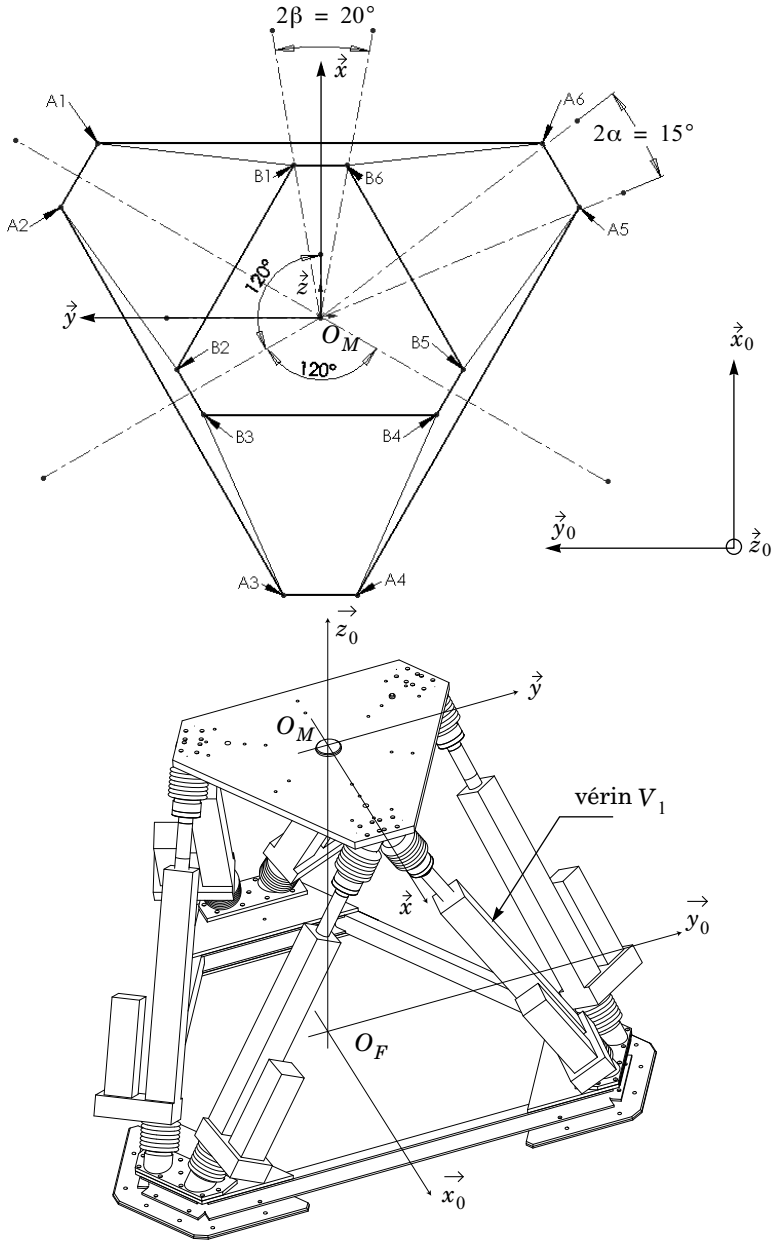


Figure 3 : schéma filaire et perspective de la plate-forme en position initiale

La plate-forme hexapode comporte 6 vérins identiques, le i-ème vérin est noté $\boldsymbol{V}_i$, sa structure cinématique est analogue à celle du vérin $\boldsymbol{V}_1$ représentée ci-après (figure 4).

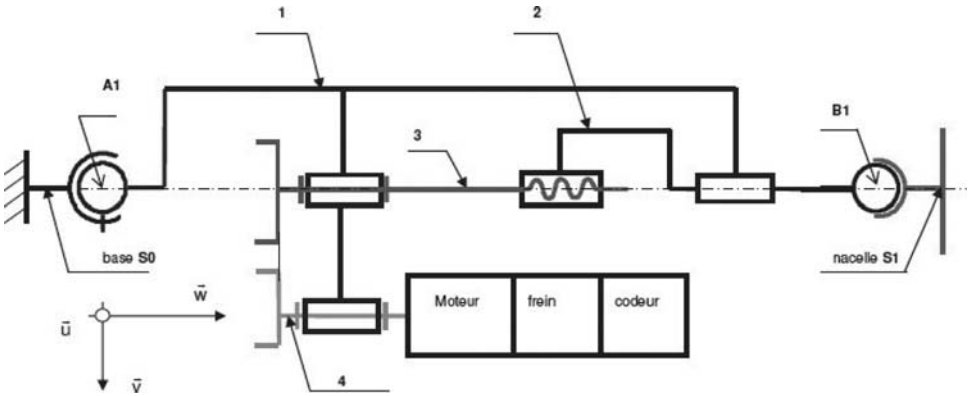
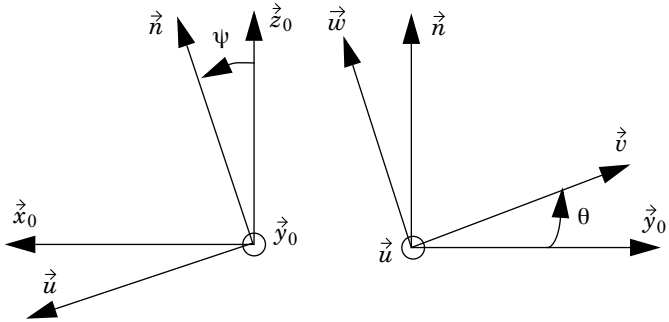


Figure 4 : schéma structurel du vérin $V1$

Le vérin $\boldsymbol{V}_1$ est constitué des éléments suivants :



Corps 1 : la liaison existant entre $\boldsymbol{S}_0$ et **1** est une sphérique à doigt de caractéristique $(A_1, \vec{u})$ et $(A_1, \vec{v})$, (la rotation autour de $\vec{w}$ est annulée). Le repère orthonormé lié au corps **1** du vérin est $(A_1, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On passe de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par les deux rotations ψ (autour de $\vec{y}_0$) et θ (autour de $\vec{u}$). Ces deux rotations sont définies par les figures planes ci-dessus. L'élongation du vérin $\boldsymbol{V}_1$ est $\overrightarrow{A_1B_1} = \rho_1\vec{w}$ (ρ_1 est la longueur du vérin mesurée entre les extrémités A_1 et B_1 : $\rho_{1\min} = 1135$ mm , $\rho_{1\max} = 1735$ mm), G_1 est un point de **1** tel que $\overrightarrow{A_1G_1} = a_1\vec{w}$ avec $a_1 = 0,5$ m .

Tige 2 : elle est en liaison hélicoïdale d'axe $(G_2, \vec{w})$ avec l'arbre **3** (le pas de la vis est $p = 25$ mm) et en liaison glissière de direction $\vec{w}$ avec **1**. Elle fait l'objet d'une liaison rotule avec $\boldsymbol{S}_1$. G_2 est un point de **2** tel que $\overrightarrow{A_1G_2} = (\rho_1 - a_2)\vec{w}$ avec $a_2 = 0,74$ m .

Arbre 3 : il est en liaison pivot d'axe avec $(G_3, \vec{w})$ avec **1** ($\overrightarrow{A_1G_3} = a_3\vec{w}$ avec $a_3 = 0,4\text{ m}$) et comporte à son extrémité une poulie crantée de rayon $r_3 = 36\text{ mm}$.

Arbre moteur 4 : il est en liaison pivot d'axe $(G_4, \vec{w})$ avec **1**. Cet arbre comporte à son extrémité une poulie crantée de rayon $r_4 = 15\text{ mm}$. La vitesse de rotation de cet arbre par rapport à **1** est notée $\Omega_{41} = \omega_m$ (La vitesse nominale du moteur est de $3000\text{ tr}\cdot\text{mn}^{-1}$). Il entraîne en rotation l'arbre **3** par l'intermédiaire d'une courroie.

On pose $k = \dfrac{\Omega_{31}}{\Omega_{41}} = \dfrac{r_4}{r_3} = \dfrac{15}{36}$.

Pour les questions I.A.1 à I.A.4 on se place dans le cas où les seuls mouvements envisagés sont des translations selon $\vec{z}_0$ de $\boldsymbol{S}_1$ par rapport à $\boldsymbol{S}_0$ à partir d'une position initiale définie par $\overrightarrow{O_FO_{M_0}} = H_0\vec{z}_0$. Les bases $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont alors confondues. On pose $\overrightarrow{O_FO_M} = H\vec{z}_0$.

(H est la hauteur de la plate-forme, α et β sont exprimés en degrés).

I.A.1) Montrer que, pour une position courante, les composantes du vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ sur la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de (r, R, α, β, H) sont données par :

$$X_1 = r\cos\beta - R\cos(60-\alpha)$$

$$Y_1 = r\sin\beta - R\sin(60-\alpha)\ .$$

$$Z_1 = H$$

I.A.2) Connaissant les longueurs maximale $(\rho_{\max})$ et minimale $(\rho_{\min})$ de chaque vérin, évaluer les hauteurs correspondantes $H_{\max}$ et $H_{\min}$ atteintes par la plate-forme mobile. En déduire la course maximale de la plate-forme et les caractéristiques d'origine (ρ_0, H_0) qui définissent la position initiale (ou position moyenne) dans toute la suite de l'étude (O_M occupe alors la position O_{M_0}). Conclure quant à la conformité au cahier des charges.

I.A.3) Le constructeur préconise de respecter pour les vérins les spécifications suivantes :

- vitesse maximale des vérins : $V_{\max} = 600\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$;
- accélération maximale des vérins (à vide) $\gamma_{\max} = 12\cdot10^3\text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}$.

On souhaite, pour un mouvement de la nacelle sinusoïdal (de fréquence f), construire dans le plan (fréquence (f), amplitude (A)) et en coordonnées logarithmiques décimales, le diagramme définissant le domaine de fonctionnement admissible.

On pose $\overrightarrow{O_FO_M} = \overrightarrow{O_FO_{M_0}} + \overrightarrow{O_{M_0}O_M} = H_0\vec{z}_0 + \dfrac{A}{2}\sin(2\pi ft)\vec{z}_0 = Z\vec{z}_0$.

Compte tenu du cahier des charges et des spécifications du vérin, déterminer les limites imposées à son fonctionnement en vitesse, accélération, amplitude et fréquence. On exprimera pour cela $|\dot{Z}|_{\max}$ et $|\ddot{Z}|_{\max}$ en fonction de A et f. En déduire le tracé demandé (On utilisera la figure 1 du document réponse). Commenter le domaine d'utilisation de la plate-forme.

I.A.4) On veut montrer que pour le mouvement défini précédemment, la rotation ψ autour de $(A_1, \vec{y}_0)$ du corps **1** est négligeable devant la rotation θ autour de l'axe $(A_1, \vec{u})$. En exprimant de deux façons les composantes du vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, montrer que :

$$\tan\psi = \frac{r\cos\beta - R\cos(60-\alpha)}{H} \text{ et que } \tan\theta = -K_p \sin\psi \text{ avec}$$

$$\frac{r\sin\beta - R\sin(60-\alpha)}{r\cos\beta - R\cos(60-\alpha)} = K_p = C^{te} \text{ (On rappelle que } 2\alpha = 15° \text{ et } 2\beta = 20°).$$

En déduire alors que la rotation ψ est négligeable devant la rotation θ.

I.A.5) On se place maintenant dans le cas où les seuls mouvements envisagés sont des translations selon $\vec{x}$ de $\boldsymbol{S}_1$ par rapport à $\boldsymbol{S}_0$. $\boldsymbol{S}_1$ reste dans le plan horizontal défini par la position d'origine ($\rho_0 = 1435$ mm , $H_0 = 1288$ mm), le point O_M est alors dans la position initiale O_{M_0}. Les bases $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ restent confondues. On pose $\overrightarrow{O_{M_0}O_M} = \lambda\vec{x}_0$, λ étant une fonction du temps. Le vérin dont l'allongement est maximal est le vérin dont les extrémités sont A_3 et B_3. On conserve pour le vérin V_3 le paramétrage (ψ, θ) utilisé pour le vérin V_1.

a) Donner, pour une position courante, les composantes du vecteur $\overrightarrow{A_3B_3} = \rho_3\vec{w}$ sur la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de $(\lambda, r, R, \alpha, \beta)$.

b) Montrer que, pour ce vérin, les relations liant respectivement ψ et θ à λ, r, R, α, β et H_0 sont données par :

$$\tan\psi = -\frac{\lambda - r\sin(30+\beta) + R\cos\alpha}{H_0} \; ; \; \tan\theta = -K_c\cos\psi \text{ avec } K_c = \frac{r\cos(30+\beta) - R\sin\alpha}{H_0}$$

c) En déduire le débattement angulaire du paramètre ψ de la liaison sphérique à doigt entre le vérin $\boldsymbol{V}_3$ et la base $\boldsymbol{S}_0$ lorsque λ évolue. Montrer alors que cette valeur peut être supérieure à la déflexion maximale permise par le joint de Cardan utilisé $(\pm 35°)$. Comment peut-on positionner le joint de Cardan afin d'y remédier ?

I.B - Détermination des performances de la chaîne de mesure de la position

Objectifs :

Montrer que la bande passante de l'étage d'entrée est compatible avec la fréquence maximale des signaux codeurs.

Montrer que les signaux codeurs permettent d'obtenir la précision théorique de $+/-0,05$ mm *, exigée par le cahier des charges fonctionnel, sur la mesure de déplacement de la tige du vérin.*

Montrer que l'interpolation des signaux codeurs permet d'obtenir la précision nécessaire de $20''$ *sur la position angulaire du rotor du moteur brushless. Précision imposée par une commande sans à-coup à très basse vitesse.*

La mesure de la position de la tige du vérin est assurée par un codeur incrémental Heidenhain ERN 1387 accouplé directement au rotor du moteur brushless. La structure électro-mécanique détaillée est donnée figure 4. Ce codeur délivre trois signaux : $a(t)$, $b(t)$ et $r(t)$. Les signaux sinusoïdaux $a(t)$ et $b(t)$ sont déphasés de $90°$ électrique et leur amplitude M est de 1 V. Le signal de référence $r(t)$, associé à une butée mécanique, permet l'initialisation du compteur où l'on stocke la position courante. Les signaux $a(t)$ et $b(t)$ comportent 2048 périodes par tour. L'alimentation du codeur est unipolaire $0/+5$ V.

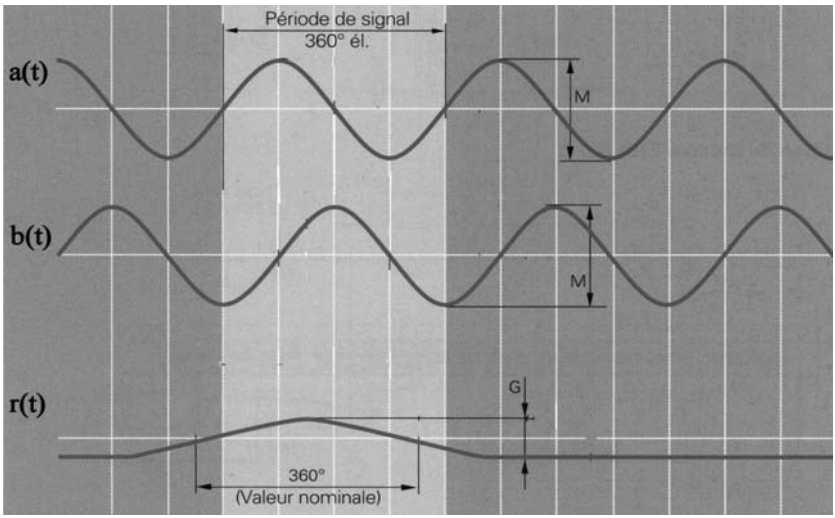


Figure 5 : d'après catalogue capteurs rotatifs Heidenhain

Les signaux codeurs sont utilisés pour :

- mesurer sur la course du vérin la position de la tige du vérin (course $= 600$ mm ; précision $+/-0,05$ mm). La position de la tige est stockée en binaire naturel dans le mot $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$;
- mesurer sur un tour la position angulaire du rotor du moteur brushless, afin de pouvoir imposer, en fonction de cette position, l'amplitude et la phase du courant d'alimentation dans les enroulements statoriques. La précision

demandée par la boucle courant de l'asservissement est de $20''$ (1 degré $= 3600''$). La position du rotor est stockée en binaire naturel dans le mot $\boldsymbol{P}_{\text{rot}}$;

- mesurer la fréquence de rotation du moteur dans la boucle d'asservissement de vitesse.

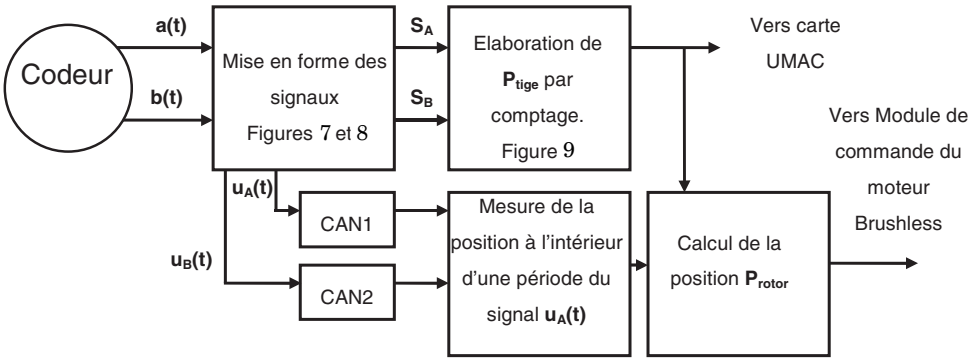


Figure 6 : schéma structurel de l'élaboration des grandeurs $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$ et $\boldsymbol{P}_{\text{rot}}$

I.B.1) Détermination des performances de l'étage d'entrée

Objectif : montrer que la bande passante de l'étage d'entrée est compatible avec la fréquence maximale des signaux codeurs.

Les signaux $a(t)$, $b(t)$ et $r(t)$ sont transmis à l'aide de trois paires torsadées regroupées dans un câble blindé. Avant d'être traité, chaque signal subit une amplification et un décalage afin de rendre son niveau compatible avec les composants utilisés dans le variateur. Le schéma de la figure 7 représente l'étage d'entrée (dans le variateur) du signal $a(t)$, on retrouve un dispositif identique pour les signaux $b(t)$ et $r(t)$. L'amplificateur linéaire intégré est supposé parfait, alimentation bipolaire $-15\text{ V}/+15\text{ V}$.

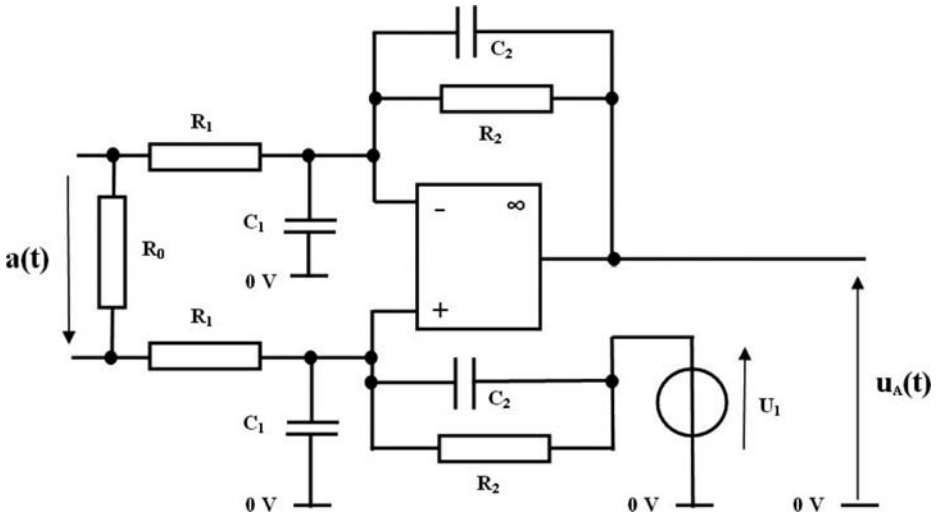


Figure 7

La tension U_1 est une tension continue fixe. On rappelle que l'on associe la grandeur complexe $\underline{U} = Ue^{j\varphi}$ à la grandeur temporelle $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$.

a) Calculer la fréquence de rotation N_{max} du moteur lorsque la tige du vérin se déplace à la vitesse maximale de $600\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire la fréquence maximale f_{max} du signal $a(t)$.

b) On suppose dans un premier temps $U_1 = 0\ \text{V}$, exprimer $\underline{U}_A$ en fonction de $\underline{A}$, R_1, R_2 et C_2. Quels sont la nature et l'ordre de ce filtre ? Les composants ont pour valeurs caractéristiques : $R_1 = 4,7\ k\Omega$; $C_1 = 220\ pF$; $R_2 = 47\ k\Omega$ et $C_2 = 10\ pF$. Déterminer la bande passante à -3 dB de ce filtre. Donner l'expression de $u_A(t)$ en régime permanent si $a(t) = \sin(2 \cdot \pi f_{maxi} \cdot t)$. Que peut-on dire de l'amplitude du signal $u_A(t)$ et de son déphasage par rapport à $a(t)$ lorsque la fréquence de rotation du moteur varie de 0 à N_{max} ?

c) La valeur du signal $u_A(t)$ doit être comprise entre $2\ \text{V}$ et $12\ \text{V}$ afin que le niveau de ce signal soit compatible avec le convertisseur analogique numérique (figure 6). Donner l'expression de $u_A(t)$ en fonction de U_1 si $a(t) = 0$ et calculer la valeur de U_1 qui permet au signal $u_A(t)$ de respecter la contrainte $2\ \text{V} \leq u_A(t) \leq 12\ \text{V}$.

I.B.2) Mise en forme et utilisation des signaux codeur

1er objectif : montrer que les signaux codeurs permettent d'obtenir la précision théorique de $+/-0,05$ mm *, exigée par le cahier des charges fonctionnel, sur la mesure de déplacement de la tige du vérin.*

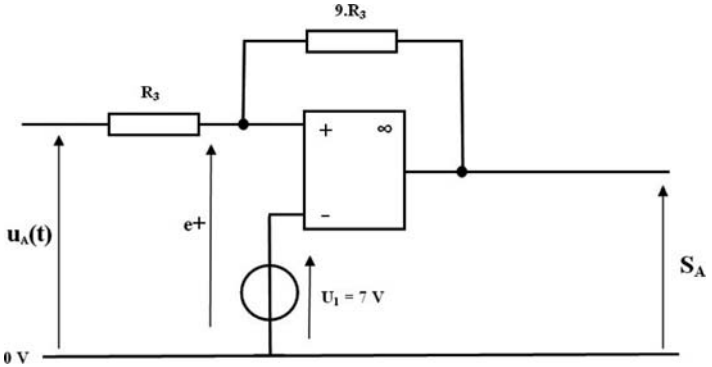


Figure 8 : montage de mise en forme des signaux codeurs

Le signal $u_A(t)$ est mis en forme afin d'être compatible avec le compteur/décompteur qui fournit la mesure de la position $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$. Le traitement est naturellement identique pour $u_B(t)$ et $r(t)$. Les amplificateurs linéaires intégrés sont supposés parfaits, l'alimentation est unipolaire $0/+15$ V. Les tensions de saturation sont $-Vsat = 0$ V et $+Vsat = 14$ V.

a) Exprimer e^+ en fonction de $u_A(t)$ et S_A. En déduire :

- l'inégalité que doit vérifier $u_A(t)$ lorsque $S_A = +Vsat$,
- et l'inégalité que doit vérifier $u_A(t)$ lorsque $S_A = 0$.

Calculer les seuils de basculement du trigger. Dessiner le graphe S_A en fonction de $u_A(t)$ pour $2\text{ V} \leq u_A(t) \leq 12\text{ V}$. Compléter la figure 2 du document réponse. Quel est le rôle du trigger ?

b) La valeur courante $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$ du compteur binaire est mise à zéro lors de la prise d'origine mesure (procédure non étudiée ici). Le compteur est incrémenté ou décrémenté à **chaque transition** du signal S_A suivant le sens de rotation du moteur comme l'illustre le grafcet de la figure 9.

Donner les expressions logiques des réceptivités « Rotation sens horaire » et « Rotation sens anti-horaire » en fonction des variables logiques $\boldsymbol{S}_A$ et $\boldsymbol{S}_B$.

La valeur initiale de $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$ étant nulle, indiquer la valeur de $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$ lorsque le moteur fait un tour dans le sens horaire et en déduire la précision obtenue sur la mesure du déplacement de la tige du vérin. Conclure quant au respect du cahier des charges fonctionnel.

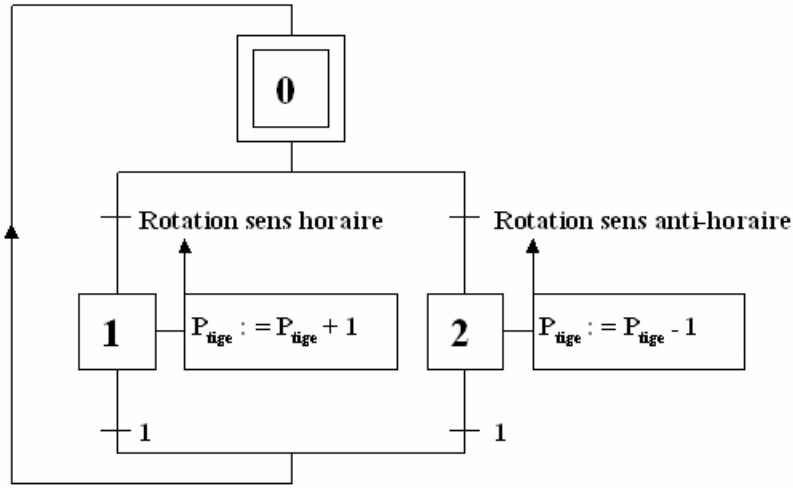


Figure 9 : grafcet, détermination de $\boldsymbol{P}_{\text{tige}}$

2ème objectif : montrer que l'interpolation des signaux codeurs permet d'obtenir la précision nécessaire de $20''$ *(*1 *degré =* $3600''$*) sur la position angulaire du rotor du moteur brushless. Précision imposée par une commande sans à-coup à très basse vitesse.*

Cette mesure est stockée en code binaire naturel dans le mot $\boldsymbol{P}_{\text{rotor}}$.

c) Indiquer la résolution minimale nécessaire pour obtenir la précision de $20''$.

d) Les caractéristiques des convertisseurs sont les suivantes : nombre de bits : 12, pleine échelle : $0 - 14$ V. Les signaux $u_A(t)$ et $u_B(t)$ sont des sinusoïdes de valeurs minimale 2 V et maximale 12 V. Indiquer le nombre N de valeurs que l'on peut distinguer en sortie du convertisseur CAN1 pendant une période du signal $u_A(t)$.

En utilisant les résultats de la conversion analogique numérique des signaux $u_A(t)$ et $u_B(t)$ le calculateur détermine la position du rotor à l'intérieur d'une période du signal $u_A(t)$. Ce calcul est effectué par développement limité de la fonction arc-tangente. En combinant le résultat de ce calcul avec l'information fournie par le comptage des périodes, le calculateur détermine la position $\boldsymbol{P}_{\text{rotor}}$. Il est donc possible grâce à cette méthode d'augmenter la précision du codeur, on obtient une résolution de $2048 \times \text{N}$.

e) Vérifier que la grandeur $\boldsymbol{P}_{\text{rotor}}$ permet d'assurer la mesure avec la précision de $20''$ *(1 degré* $= 3600''$*)* nécessaire au bon fonctionnement du pilotage du moteur brushless.

Partie II - Détermination du moment d'inertie ramené à l'arbre moteur et calcul du couple moteur

L'objectif de cette partie est le calcul du moment d'inertie ramené à l'arbre moteur et du couple moteur nécessaires à l'étude de l'asservissement d'un vérin envisagée dans la Partie - III.

On se place dans les conditions de mouvement définies aux questions I.A.1 à I.A.4 : les seuls mouvements envisagés sont des translations selon $\vec{z}_0$ de $\boldsymbol{S}_1$ par rapport à $\boldsymbol{S}_0$. Le résultat de la question I.A.4 montre alors que la rotation ψ est négligeable devant θ : on supposera donc dans toute la suite de l'étude que le vecteur rotation instantanée du corps du vérin par rapport à $\boldsymbol{S}_0$ se réduit à $\vec{\Omega}_{1/S0} = \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{u}$, (on confondra $\boldsymbol{S}_0$ et $\boldsymbol{0}$). La nature du mouvement permet de réduire l'étude à celle du seul vérin $\boldsymbol{V}_1$. La longueur initiale de chaque vérin est donnée par $\rho_0 = 1435$ mm ; la valeur initiale de θ est $\theta_0 = 0,4565$ rad soit encore $23,16°$.

La position initiale de la plate-forme est définie par $\overrightarrow{O_F O_{M_0}} = H_0\vec{z}_0$ avec $H_0 = 1288$ mm.

Hypothèses complémentaires (on se réfère par ailleurs aux hypothèses de la question) :

- la masse totale du vérin est $m = 31,8$ kg. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 9,81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ $(\vec{g} = -g\vec{z}_0)$;
- toutes les liaisons sont parfaites ;
- les actions électromagnétiques du stator lié à **1** sur le rotor lié à **4** représentées par un torseur-couple noté

$$\{\text{Moteur} \to 4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C}_m \end{array} \right\}_{G_1} \quad \text{avec } \vec{C}_m = C_m\vec{w} \ ;$$

- les caractéristiques d'inertie de chacun des solides constituants le vérin ***Vi*** sont les suivantes :

Corps 1 : la masse de **1** est $m_1 (m_1 = 12\ \text{kg})$, G_1 est son centre d'inertie, il est tel que $\overrightarrow{A_1G_1} = a_1\vec{w}$ avec $a_1 = 0,5\ \text{m}$. La matrice représentant l'opérateur d'inertie est

$$\boldsymbol{I}(A_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} .$$

Le moment d'inertie de 1 par rapport à l'axe $(A_1, \vec{u})$ est $A_1 = 7,5 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Tige 2 : la masse de **2** est $m_2\ (m_2 = 10,8\ \text{kg})$. G_2 est son centre d'inertie, il est tel que $\overrightarrow{A_1G_2} = (\rho_1 - a_2)\vec{w}$ avec $a_2 = 0,74\ \text{m}$. La matrice représentant l'opérateur d'inertie est

$$\boldsymbol{I}(G_2, 2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} .$$

Le moment d'inertie de **2** par rapport à l'axe $(G_2, \vec{u})$ est $A_2 = 15 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. La tige du vérin **2** est en liaison hélicoïdale d'axe $(G_2, \vec{w})$ avec **3** et en liaison glissière de direction $\vec{w}$ avec **1** ; on rappelle : le pas de la vis est $p = 25\ \text{mm}$ et on note h le pas réduit.

Arbre 3 : la masse de **3** est $m_3 (m_3 = 5\ \text{kg})$. Cet arbre, en liaison pivot d'axe $(G_3, \vec{w})$ avec **1** , comporte à son extrémité une poulie de rayon $r_3 = 36\ \text{mm}$. G_3 est son centre d'inertie, il est tel que $\overrightarrow{A_1G_3} = a_3\vec{w}$ avec $a_3 = 0,4\ \text{m}$. On pose $\vec{\Omega}_{31} = \Omega_{31}\vec{w}$. La matrice représentant l'opérateur d'inertie est

$$\boldsymbol{I}(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} .$$

Le moment d'inertie de **3** par rapport à l'axe $(G_3, \vec{u})$ est $A_3 = 9,37 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
Le moment d'inertie de **3** par rapport à l'axe $(G_3, \vec{w})$ est $C_3 = 9,5 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Arbre moteur 4 : la masse de **4** est $m_4 (m_4 = 4\ \text{kg})$. Cet arbre comporte à son extrémité une poulie de rayon $r_4 = 15\ \text{mm}$. G_4 est son centre d'inertie, on supposera pour les calculs que G_4 est situé sur l'axe du vérin et est confondu avec

G_3, il est donc tel que $\overrightarrow{A_1G_4} = \overrightarrow{A_1G_3} = a_3\vec{w}$. On pose $\vec{\Omega}_{41} = \Omega_{41}\vec{w}$. La matrice représentant l'opérateur d'inertie est

$$\boldsymbol{I}(G_4, 4) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} .$$

Le moment d'inertie de **4** par rapport à l'axe $(G_4, \vec{u})$ est $A_4 = 5,63 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
Le moment d'inertie de **4** par rapport à l'axe $(G_4, \vec{w})$ est $C_4 = 11,34 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
On rappelle que l'arbre **4** est en liaison pivot d'axe $(G_4, \vec{w})$ avec **1**, la vitesse de rotation de cet arbre par rapport à **1** est notée ω_m (La vitesse nominale du moteur est de $3000\ \text{tr} \cdot \text{mn}^{-1}$). Il entraîne en rotation l'arbre **3** par l'intermédiaire d'une courroie et on rappelle que :

$$k = \frac{\Omega_{31}}{\Omega_{41}} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{15}{36}.$$

Notations :

- les efforts sont représentés par des torseurs notés comme suit :

l'action du vérin $\boldsymbol{V}_1$ sur le solide $\boldsymbol{S}_1$, donc de **2** sur $\boldsymbol{S}_1$, est représentée par le glisseur

$$\{V_1 \to S_1\} = \{2 \to S_1\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{B_1} \text{ avec } \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z},$$

l'action du solide $\boldsymbol{S}_0$ sur le vérin $\boldsymbol{V}_1$ est représentée par le torseur

$$\{S_0 \to V_1\} = \{S_0 \to 1\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{01} \\ \vec{N}_{01} \end{matrix} \right\}_{A_1} \text{ avec } \vec{R}_{01} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} + Z_{01}\vec{z} \ ;$$

- on admettra pour simplifier que l'action de la pesanteur sur le vérin V_1 est représentée par le glisseur

$$\{\text{pes} \to V_1\} = \left\{ \begin{matrix} -mg\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1} ;$$

- l'action de la pesanteur sur la nacelle $\boldsymbol{S}_1$ qui supporte la cuve est représentée par le glisseur

$$\{\text{pes} \to S_1\} = \left\{ \begin{matrix} -Mg\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_M} \text{ avec } M = 10^3\ \text{kg}.$$

(le centre d'inertie de l'ensemble {cuve, nacelle} est supposé confondu avec O_M).

II.A - Détermination du moment d'inertie équivalent ramené à l'arbre moteur

II.A.1)

a) Dans le but d'exprimer l'énergie cinétique du vérin $\boldsymbol{V}_1$ en fonction de la vitesse du moteur ω_m, on demande de donner à partir d'une écriture de fermeture de chaîne les relations liant d'une part, $\dot{\rho}_1$ et ω_m, et d'autre part de montrer à partir des relations établies en I.A.1 que

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 \sin\theta_0}{\sin\theta} .$$

b) Donner l'expression de la vitesse $\vec{V}(B_1, 2/S_0)$, en déduire que dans le cas d'un mouvement de translation selon $\vec{z}_0$, on a la relation

$$\rho_1\dot{\theta} = -\dot{\rho}_1 \tan\theta = hk\omega_m \tan\theta .$$

II.A.2)

a) Évaluer l'énergie cinétique de chacun des solides $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ dans son mouvement par rapport à $\boldsymbol{S}_0$. En déduire l'énergie cinétique du vérin $\boldsymbol{V}_1$ dans son mouvement dans $\boldsymbol{S}_0$. On montrera que cette énergie s'exprime par :

$$2T(V_1/0) = A^*\,\dot{\theta}^2 + [m_2(\rho_1 - a_2)^2 + (m_3 + m_4)a_3^2]\dot{\theta}^2 + m_2\dot{\rho}_1^2 + (C_4 + k^2C_3)\omega_m^2$$

avec $A^* = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$

b) Montrer que l'expression de l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$2T(V_1/0) = \left[A(\theta)\left(\frac{hk\sin^2\theta}{\rho_0\sin\theta_0\cos\theta}\right)^2 + k^2(m_2h^2 + C_3) + C_4\right]\omega_m^2 \quad \text{avec}$$

$$h = \frac{p}{2\pi} \text{ et } A(\theta) = \left[(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + (m_3 + m_4)a_3^2 + m_2\left(\frac{\rho_0\sin\theta_0}{\sin\theta} - a_2\right)^2\right] .$$

II.A.3) En déduire l'expression du moment d'inertie équivalent ramené à l'arbre moteur I_{eq}.

II.A.4) On constate que la variation de θ n'influe pratiquement pas sur la valeur du moment d'inertie, calculer la valeur prise par I_{eq}.

II.B - Détermination du couple résistant équivalent

Dans le but d'évaluer le couple résistant équivalent ramené à l'arbre moteur, on souhaite appliquer le théorème de l'énergie cinétique. On envisage successivement le calcul de la puissance des efforts extérieurs à l'ensemble $\boldsymbol{V}_1$, puis la détermination de la puissance des actions intérieures à $\boldsymbol{V}_1$.

II.B.1)

a) Donner l'expression de la puissance de l'action de la nacelle $\boldsymbol{S}_1$ sur **2** dans son mouvement par rapport à $\boldsymbol{S}_0$ en fonction de $(h, k, \omega_m, \theta, Z_1)$. Puis en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la nacelle $\boldsymbol{S}_1$, et en tenant compte de la question I.A.4, calculer un majorant de Z_1.

b) Achever la détermination de la puissance des efforts extérieurs à $\boldsymbol{V}_1$ dans son mouvement par rapport à $\boldsymbol{S}_0$. On fera un bilan précis des puissances concernées.

II.B.2) Calculer la puissance des actions intérieures à $\boldsymbol{V}_1$.

II.B.3) Par application du théorème de l'énergie cinétique, en déduire le couple résistant équivalent appliqué à l'arbre moteur (on utilisera pour cela les relations établies en II.A.1-a) et II.A.1-b). L'évaluation de ce couple résistant pour une évolution complète du mouvement permet de retenir un majorant de cet effort : on prendra $C_{\text{req}} = 11\ \text{N} \cdot \text{m}$.

Partie III - Modélisation de l'asservissement en position de la tige du vérin et détermination de sa bande passante

Objectif : vérifier que la bande passante de l'asservissement en position de la tige du vérin est supérieure à $3\ \text{Hz}$.

Les résultats obtenus dans la Partie II permettent d'obtenir un modèle du moteur associé à sa charge. On admettra que l'autopilotage du moteur brushless conduit du point de vue comportemental à un modèle équivalent à celui d'une machine à courant continu. Les équations du modèle équivalent sont rappelées ci-dessous où U et I représentent les grandeurs électriques équivalentes ; L, R, K_E et K_T sont les paramètres de la machine.

Hypothèses et notations

Toutes les pertes du système sont négligées, à l'exception des pertes par effet Joule dans les enroulements du moteur.

I_{eq} : moment d'inertie de toutes les parties en mouvement, ramené à l'arbre du moteur ; les résultats de la question II.A.3 montrent que la variation de I_{eq} en fonction de l'allongement du vérin est négligeable, on retient dans toute la suite $I_{\text{eq}} = 1,6 \cdot 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

ω_m : vitesse de rotation du moteur, exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. (vitesse nominale $= 3000\ \text{tr} \cdot \text{mn}^{-1}$).

C_m : couple moteur.

U : tension aux bornes du moteur.

E : force contre électromotrice.

I : intensité du courant d'induit (intensité nominale $= 17,2$ A).

C_{req} : couple résistant équivalent.

$K_E = 1,77 \text{ V} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$: coefficient de force contre électromotrice.

$K_T = 1,77 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1}$: coefficient de couple.

$R = 1,05\ \Omega$: résistance d'induit.

$L = 0,5$ mH : inductance d'induit.

La transformation de Laplace appliquée aux équations temporelles du modèle conduit aux résultats suivants :

$$C_m - C_{\text{req}} = I_{\text{eq}} p \Omega_m \ ;$$

$$U = E + (R + L_p) I \ ;$$

$$C_m = K_T I \ ;$$

$$E = K_E \Omega_m \ ;$$

C_m , C_{req} , Ω_m , I , E , U sont alors des fonctions de la variable de Laplace p : $C_m = C_m(p)$, ...

La structure de l'asservissement de position est la suivante :

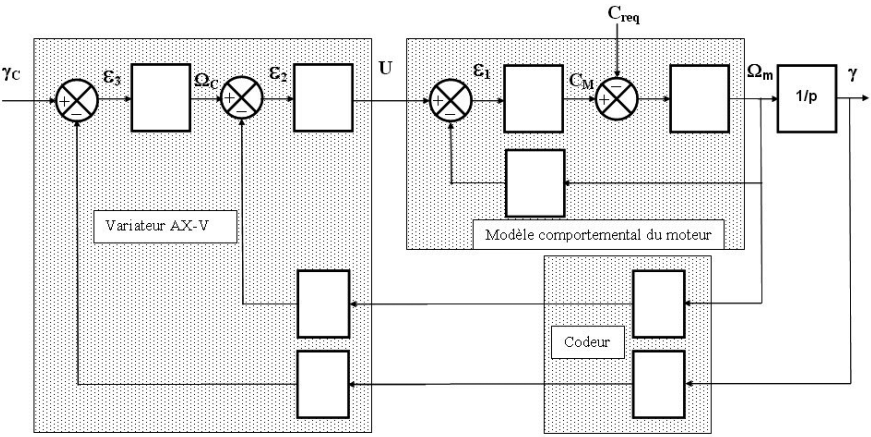


Figure 10 : schéma structurel de l'asservissement de position de l'arbre moteur

γ_c : consigne en position élaborée par la carte UMAC.

γ : position angulaire de l'arbre moteur.

III.A - Modélisation de la commande en tension du moteur

III.A.1) Établir les expressions littérales des fonctions de transfert du schéma bloc de la figure 11. Donner l'expression de Ω_m en fonction de H_1, K_2, H_3, K_4, U et C_{req}.

Montrer qu'en régime permanent (Ω_m constante) on peut écrire

$$\Omega_m = \frac{U}{K_E} - \frac{R}{K_E \cdot K_T} C_{\text{req}} .$$

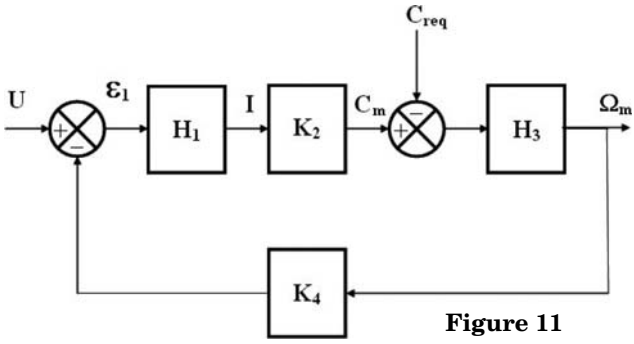


Figure 11

Quelle valeur U_0 faut-il donner à U pour obtenir une vitesse de $300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ lorsque $C_{\text{req}} = 11 \text{ Nm}$? Quelle sera alors la valeur de l'intensité en ligne ?

III.A.2) On applique la tension U_0 aux bornes du moteur. Calculer la vitesse atteinte en régime permanent, si le couple résistant est $C_{\text{req}} = 0 \text{ Nm}$. Conclure sur la possibilité de suivre une trajectoire avec un tel type de commande. Proposer une solution pour remédier à ce problème.

III.B - Étude de la boucle de vitesse

La mesure de vitesse est effectuée par traitement numérique des informations délivrées par le codeur incrémental situé sur l'arbre moteur. Le traitement numérique est suffisamment rapide pour que l'on considère que la fonction de transfert du capteur K_5 est un gain pur. Le capteur délivre une tension de 8 V lorsque le moteur (donc le codeur) tourne à $3000 \text{ tr} \cdot \text{mn}^{-1}$. La fonction de transfert K_6 du variateur est un gain pur. La fonction de transfert du correcteur de la boucle de vitesse est

$$H_c = H_{c0}\left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right) .$$

La consigne vitesse Ω_c est une tension de valeur instantanée comprise entre -10 V et $+10$ V.

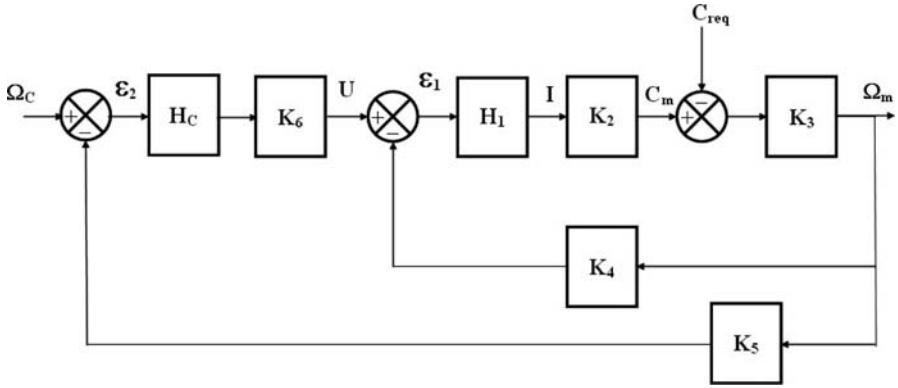


Figure 12

III.B.1) Déterminer la valeur de la constante K_5.

III.B.2) La consigne Ω_c et le couple C_{req} sont des échelons d'amplitudes respectives Ω_{c0} et C_{req0}. Déterminer en régime permanent la valeur de l'écart ε_{20}. Conclure sur l'intérêt de la boucle de vitesse.

III.C - Réglage de la stabilité de l'asservissement de position et prédétermination de sa bande passante

Objectif : assurer la stabilité et vérifier que la bande passante à -3 dB *de l'asservissement de position du vérin est supérieure à* 3 Hz *(prescription du cahier des charges).*

La fonction de transfert

$$H_v = \frac{\Omega_m}{\Omega_c} = \frac{H_{v0}}{1 + 2\,z\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

de la boucle de vitesse est assimilée à un passe-bas du second ordre de gain statique $H_{v0} = 40$ de pulsation $\omega_0 = 790 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et de coefficient d'amortissement $z = 0,68$.

On retient le schéma-bloc suivant pour modéliser la boucle de position.

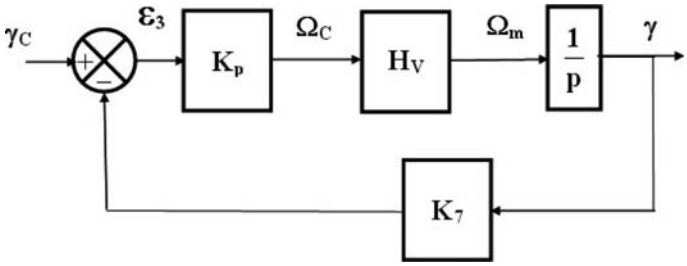


Figure 13

On donne :

$K_7 = 0,02\ \mathrm{V \cdot rad^{-1}}$; K_P (réel positif)

III.C.1) Que représente la variable γ ?

III.C.2) Donner l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte. On donne figure 14 les diagrammes de Bode de la boucle ouverte pour $\boldsymbol{K}_P = 10$.

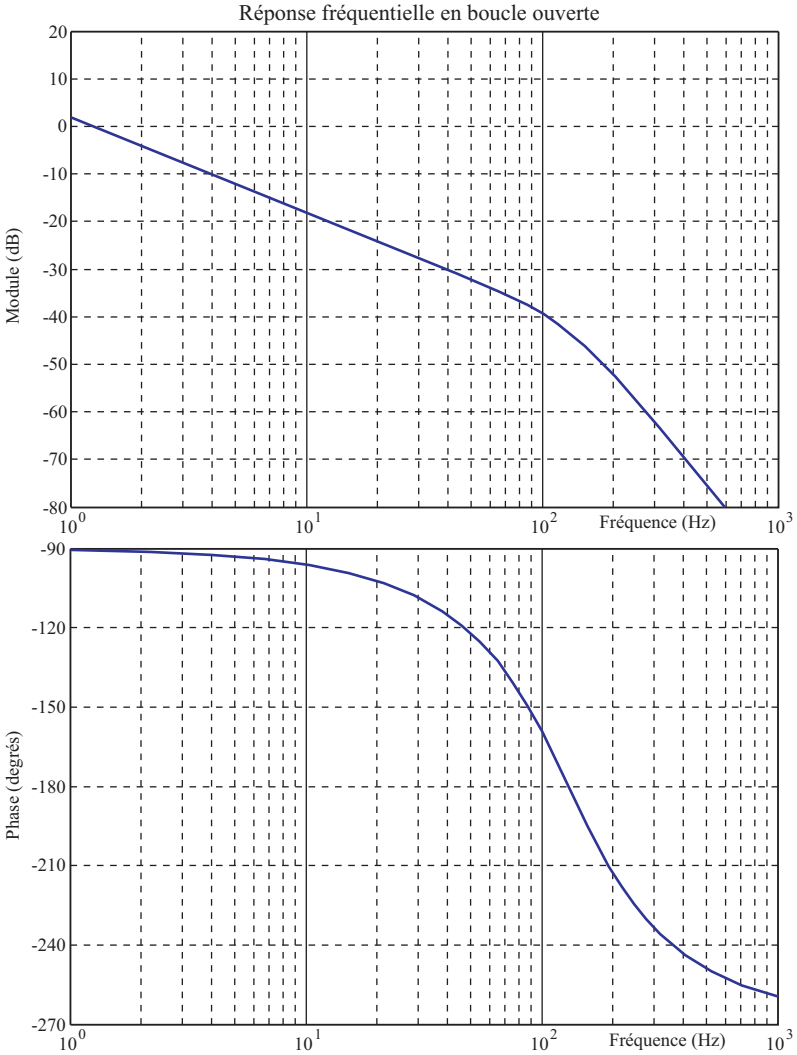


Figure 14

Déterminer la valeur K_{P0} de K_P qui permet d'obtenir une marge de phase de $60°$ et conclure quant à la stabilité de la boucle fermée.

III.C.3) Vérifier que la bande passante à -3 dB de la boucle fermée est supérieure à 3 Hz conformément au cahier des charges. Vous admettrez que la bande

passante à -3 dB en boucle fermée correspond à la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte.

III.C.4) Expliquer succinctement (40 mots maximum en vous aidant éventuellement d'un dessin) comment vous procéderiez expérimentalement pour tracer les diagrammes de Bode de la boucle fermée et vérifier ainsi la performance en bande passante de la plate-forme hexapode.

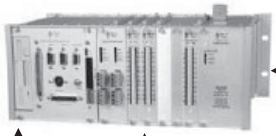
III.C.5) Au terme de cette étude, discuter la prise en compte des conditions de fonctionnement de la plate-forme telle qu'elle est proposée par le sujet et conclure.



Ordinateur Compatible PC

Fonctions :
- Permettre à l'utilisateur de fixer les caractéristiques du mouvement défini pour la maquette.
- Afficher la position de la plate-forme mobile.

Liaison ETHERNET.



Carte UMAC

Fonctions :
- Calculer la consigne de position de chacun des vérins afin que la plate-forme suive la trajectoire définie par l'opérateur. La carte délivre une consigne de position toutes les 10 ms à chacun des 6 variateurs.
- Calculer la position de la plate-forme mobile à partir des informations codeurs.

Mesure P_{tige}

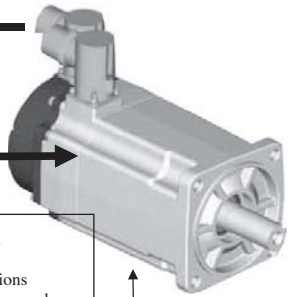
Consigne de position : 0 - 10 V

Liaison Série RS485

Sorties sin/cos du codeur



Réseau Triphasé
à fréquence variable



Codeur Incrémental

Fonctions :
- Fournir au variateur les informations nécessaires pour mesurer la fréquence de rotation et la position du rotor du moteur.

Variateur de Fréquence AX-V

Fonctions :
- Commander le moteur brushless à vitesse variable.
- Gérer les boucles d'asservissement de la vitesse et de la position du rotor du moteur Brushless.
- Traiter les informations délivrées par le codeur incrémental sin/cos afin de mesurer la position et la fréquence de rotation du rotor.

Moteur Brushless

Fonction :
- Entraîner en rotation la vis à billes qui permet à la tige du vérin de se déplacer linéairement.

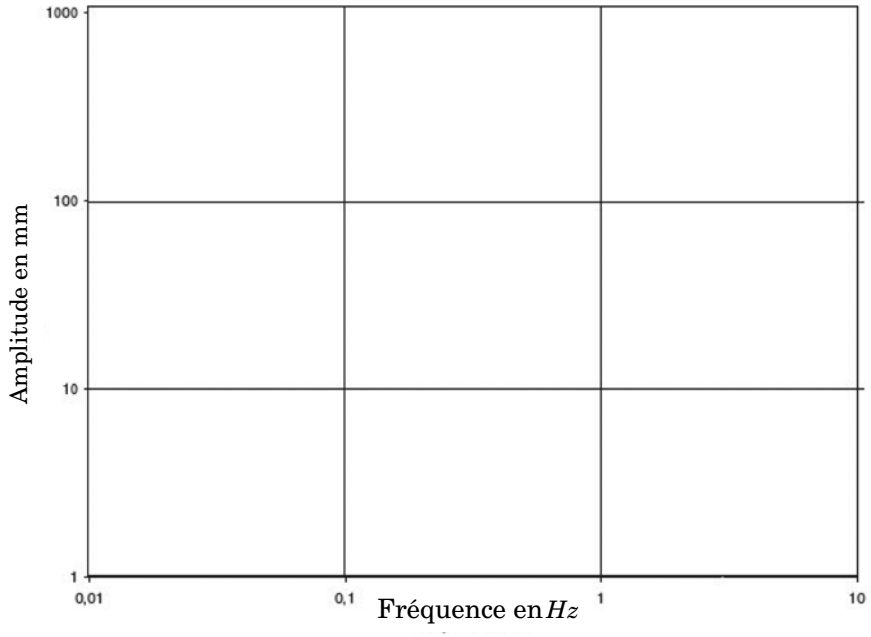
Document 1

Vers les autres variateurs

••• FIN •••

Annexe du sujet de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cette annexe doit être rendue avec les autres copies. Il ne pourra pas être délivré d'autres exemplaires de ce document.



NB : on distinguera les tracés des limites en vitesse, accélération, amplitude et fréquence (utiliser des couleurs distinctes)

Figure 1

Filière TSI

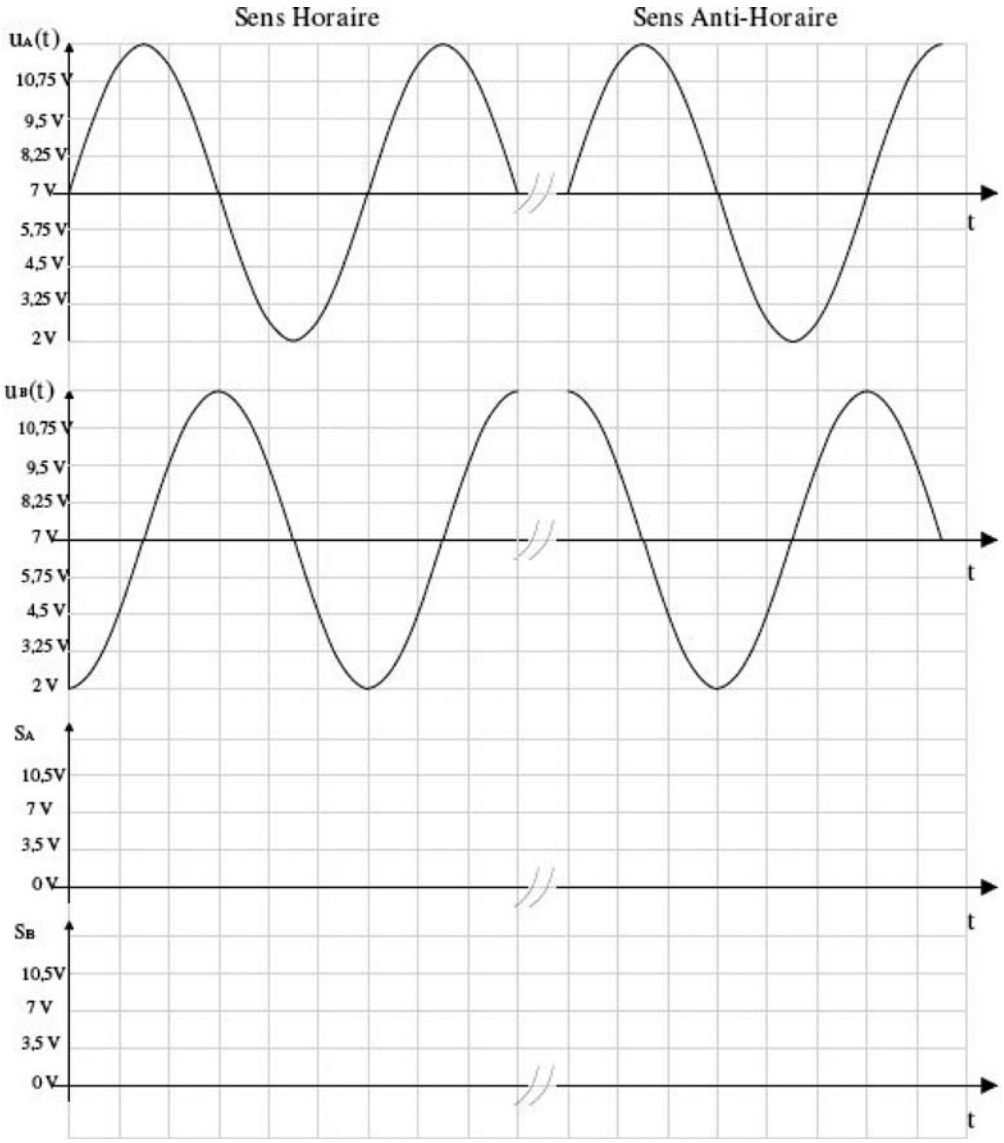


Figure 2

Travailler les chapitres de ce suje

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- ramétrage, vitesse, taux de
- ique
- nes : composition des
- tuel,
- ue et dynamique, énergie
- te
- Énergétique : puissances, théorème de l'énergie cinétique, rendement
- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta fil
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi