Concours Centrale-Supélec, France

Session 2012, filière TSI

Sciences industrielles 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : modélisation du stabilisateur
- Partie II : modèle pour la commande et vérification des performances
- Partie III : construction d'une valeur estimée de l'effort cardiaque
- Partie IV : analyse de la stabilité et conclusion

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2012/si1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

S2I 1

TSI

2012

4 heures Calculatrices autorisées

Stabilisateur cardiaque actif

Les pathologies cardiaques, et particulièrement les rétrécissements des artères qui alimentent le myocarde (muscle cardiaque), sont en constante augmentation. La chirurgie à cœur battant se substitue progressivement à celle courante impliquant un arrêt du cœur et la mise en place d'une circulation extracorporelle. L'avantage essentiel de cette chirurgie à cœur battant est de limiter les complications induites par l'intervention.

Cette technique opératoire se différencie du pontage classique par la conservation du battement cardiaque durant l'intervention ; la principale difficulté réside alors dans la nécessité d'immobiliser la partie du cœur à opérer.

Pour intervenir précisément sur la zone concernée, il est nécessaire de faire appel à un stabilisateur mécanique qui immobilise cette « zone cible ».

Actuellement, les stabilisateurs mécaniques passifs laissent subsister pour cette zone un déplacement de l'ordre du millimètre, appelé par la suite déplacement résiduel, alors que la valeur souhaitée est plutôt de $0,1$ mm. De plus, cette valeur n'est pas satisfaisante en vue d'une utilisation endoscopique, technique d'intervention dont le développement va croissant.

La solution proposée pour remédier à ces insuffisances est constituée par un stabilisateur cardiaque actif, c'est-à-dire commandé en position. Dans le cas de cette étude, il s'agit du système Cardiolock1 développé principalement au laboratoire du LSIIT de l'Université de Strasbourg.

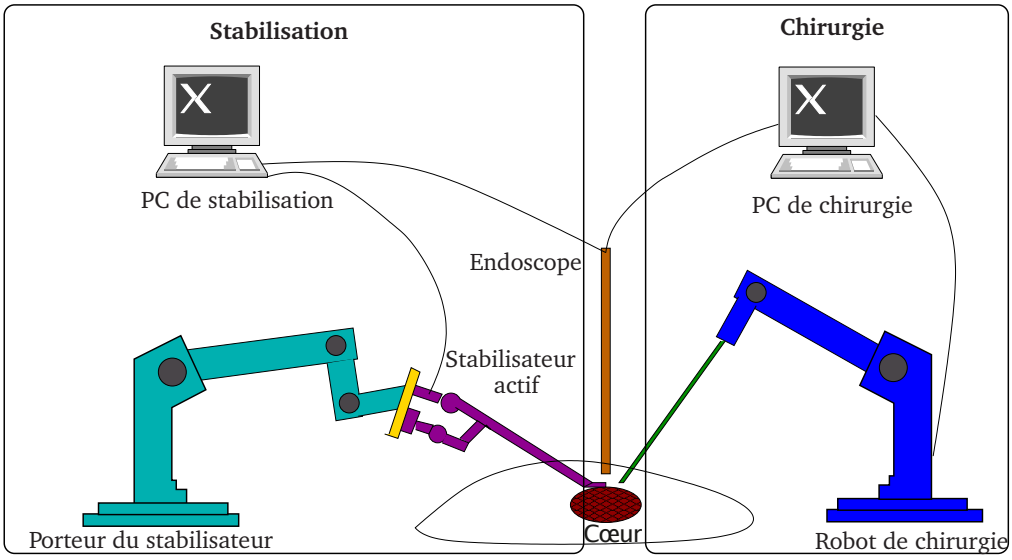


Figure 1 Contexte d'utilisation du Cardiolock1

Présentation du Cardiolock1

Les faibles amplitudes des mouvements considérés et la recherche de liaisons sans jeu, justifient l'emploi d'un mécanisme constitué de « liaisons pivots élastiques » : celles-ci sont obtenues en combinant l'élasticité du matériau et la géométrie des pièces (amincissement résultant d'un enlèvement de matière localisé) de façon à favoriser une déformation locale de la pièce qui permet d'obtenir le comportement d'une liaison pivot sans jeu.

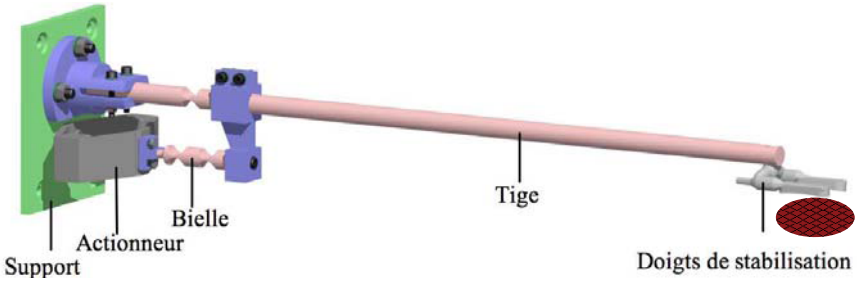


Figure 2 Représentation du stabilisateur actif

BY-NC-SA

Le Cardiolock1 comporte les éléments suivants :
- une tige flexible de diamètre compatible avec la chirurgie mini-invasive comportant à son extrémité une fixation par succion sur la paroi cardiaque ;
- un dispositif bielle-manivelle constitué de liaisons pivots élastiques (sans jeu) obtenues par enlèvement de matière ;
- un actionneur linéaire piézoélectrique afin de garantir une dynamique importante ; l'accélération du myocarde (le muscle cardiaque) passe de 0,25 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (avec stabilisateur) à 10 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (sans stabilisateur). La grande raideur de cet actionneur devant celle du dispositif bielle-manivelle permet de disposer de la course maximale de l'actionneur.

La tige est stérilisable par autoclave ; quant au reste du Cardiolock1 il peut être protégé par un sac stérile.

Objectif final et extrait du cahier des charges

L'objectif final de l'étude est la mise place d'un modèle pour la commande permettant de vérifier les spécifications extraites du cahier des charges :
- domaine fréquentiel du battement cardiaque jusqu'à 20 Hz ;
- course maximale de l'actionneur piézoélectrique égale à 130 μm ;
- espace de travail au voisinage de la « zone cible » :
  - en statique, le Cardiolock1 doit permettre de compenser le déplacement résiduel maximal de $0,1$ mm,
  - en dynamique, le Cardiolock1 doit limiter le déplacement résiduel dû au mouvement cardiaque à 25 μm.
- temps de réponse à 5% de l'actionneur piézoélectrique du Cardiolock1 inférieur à 5 ms ;
- marge de phase du système Cardiolock1 supérieure à 50°.

À cette fin, seront envisagées successivement :
- la mise en place des relations « entrée-sortie » avec la vérification des spécifications du cahier des charges concernant la géométrie, les comportements en statique ou sous un chargement cyclique. Le réglage de la boucle locale permettant de diminuer l'influence des non linéarités de l'actionneur piézoélectrique ;
- la vérification des performances du Cardiolock1 perturbé par le mouvement cardiaque ;
- l'évaluation des marges de stabilité de la structure asservie assurant un fonctionnement conforme au cahier des charges.

Hypothèses et notations

Un modèle cinématique du stabilisateur actif est défini par les figures **4**, **5** et **6**. Dans toute l'étude, on retiendra les hypothèses et notations suivantes :
- l'étude envisagée est faite dans le cadre d'une modélisation plane ; le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, galiléen, est lié au bâti **0** ; le déplacement résiduel à rattraper est supposé positif sur $\vec{y}_0$;
- les solides **1**, **2**, **3** et **4** sont indéformables ; la tige **5** est supposée, sauf spécification contraire, déformable ;
- les déplacements envisagés sont de petits déplacements, on confondra dans toute la suite, au voisinage de 0, le sinus de l'angle avec sa mesure exprimée en radian ou encore le cosinus de l'angle avec 1 ;
- une liaison pivot sans jeu (dans la suite du texte, notée en abrégé : pivot*), est obtenue par enlèvement de matière et se comporte comme une liaison pivot parfaite à laquelle s'ajoute, de manière indissociable, une raideur de torsion générant un couple de rappel porté par l'axe de la liaison. Ainsi, par exemple, la liaison pivot* entre les solides **0** et **1** peut être représentée comme la superposition d'une liaison pivot parfaite et d'un ressort de torsion monté entre **0** et **1**, de raideur K_{01} ; on obtient alors, par exemple, le graphe et le schéma cinématique associés à cette liaison pivot* présentés **figure 3** ;

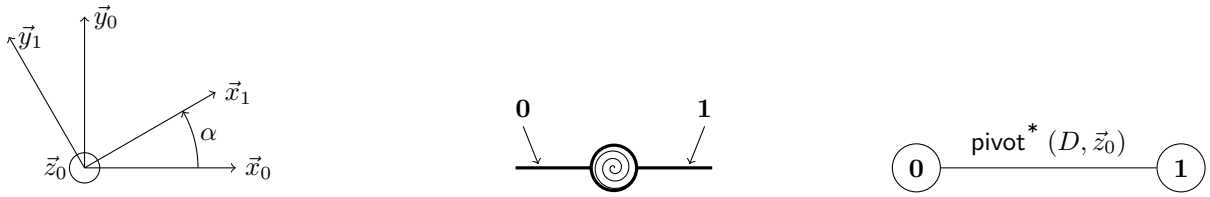


Figure 3

- les torseurs cinématiques et statiques de cette liaison pivot* seront notés respectivement $\{\mathbf{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ et $\{\mathbf{0} \to \mathbf{1}\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 \\ -K_{01}\alpha\vec{z}_0 \end{array} \right\}_D$;
- la manivelle **1** est constituée par les deux éléments cylindriques **1** et **2** rigidement liés en C par une liaison encastrement. Dans toute la suite de l'étude, cet ensemble, réputé indéformable, supposé formé des solides **1** et **2** sera noté **1**, il est représenté par les segments DC et CB de longueurs respectives $L_1 = 21$ mm et $d_1 = 30$ mm ;

BY-NC-SA

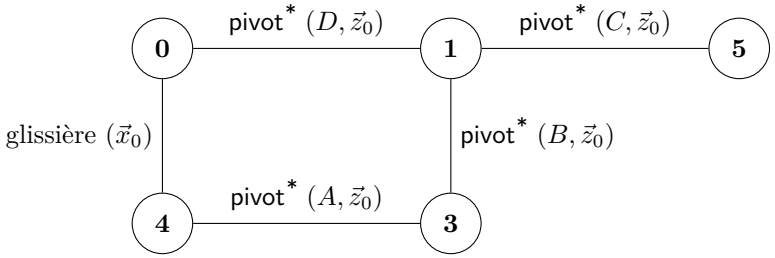
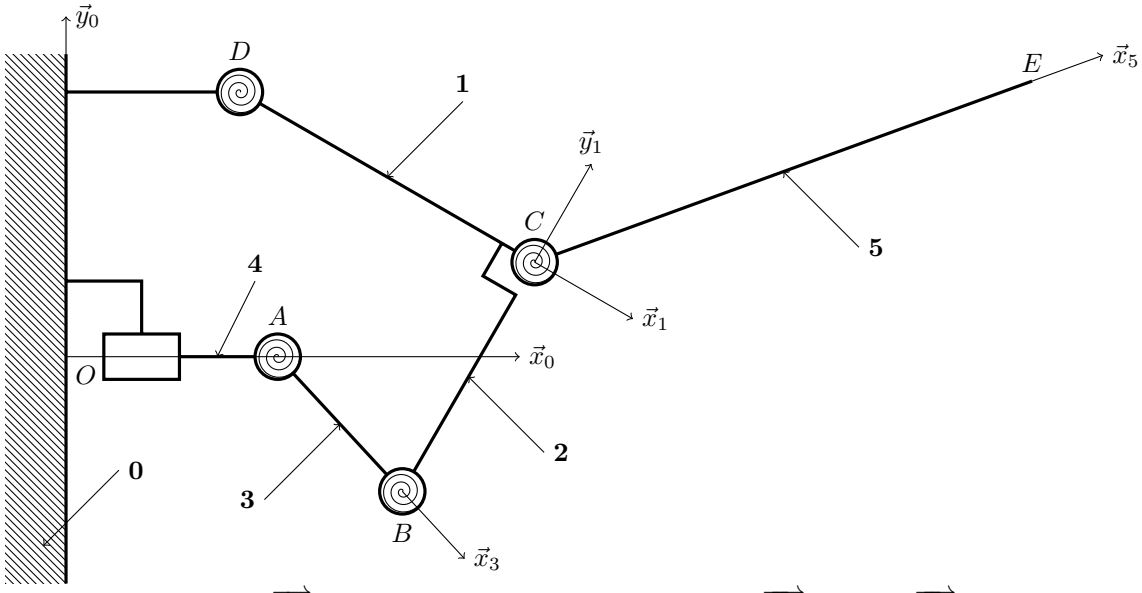


Figure 4 Graphe des liaisons (**5** est réputé dans ce cas être un solide indéformable)



$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{x}_0$, ($\lambda = \lambda_0$ pour $\alpha = \beta = \gamma = 0$), $\overrightarrow{DC} = L_1\vec{x}_1$, $\overrightarrow{CB} = -d_1\vec{y}_1$,
$\overrightarrow{BA} = -L_3\vec{x}_3$, $\overrightarrow{CE} = L_5\vec{x}_5$, $\overrightarrow{OD} = a\vec{x}_0 + d_1\vec{y}_0$, $a = 10$ mm

Figure 5 Schéma cinématique du stabilisateur actif

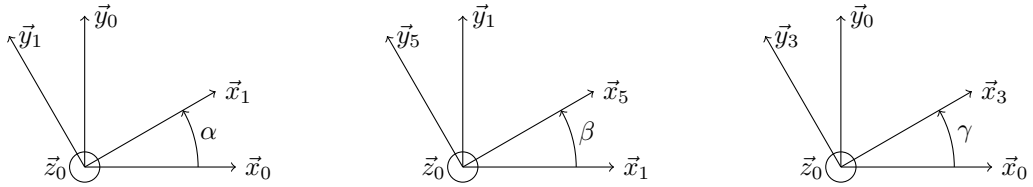


Figure 6 Paramétrage des rotations

- la tige **5**, cylindrique de révolution est de longueur $L_5 = 300$ mm, et de diamètre $D_5 = 10$ mm. Sa masse est $m_5 = 185$ g, elle est supposée pleine dans toute l'étude, l'élément de succion ne sera pas pris en compte. Elle est modélisée par une tige, *a priori*, déformable pour laquelle le segment CE représente la ligne moyenne. Sa liaison avec le solide **1** est assimilée à une liaison pivot élastique de raideur K_2 ;
- la bielle **3** formée d'une tige cylindrique de révolution de longueur $L_3 = 18$ mm et de diamètre $D_3 = 10$ mm ; elle est modélisée par le segment AB supposé indéformable ;
- l'actionneur piézoélectrique est le modèle APA®120ML de la société Cédrat. Il est formé de céramiques et d'une structure amplificatrice montée entre le bâti **0** et la tige **4**. Le déplacement maximal de la structure amplificatrice est égal en norme à 130 μm.

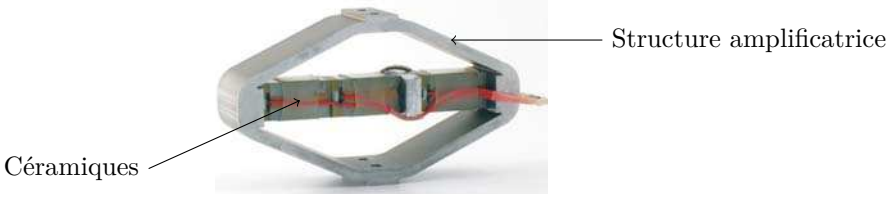


Figure 7 Actionneur piézoélectrique APA®120ML

Le mouvement de la paroi cardiaque se manifeste par un déplacement de l'extrémité de la tige **5**. L'actionneur piézoélectrique permet le rattrapage de ce déplacement résiduel par déformation des liaisons pivot* et de la tige **5**.

BY-NC-SA

Afin d'analyser puis de justifier la modélisation proposée permettant d'évaluer les performances du Cardiolock1, le sujet comporte quatre parties :

1. modélisation du Cardiolock1, évaluation du comportement statique, réglage de la boucle de l'actionneur piézoélectrique et mise en place d'un modèle pour la commande ;
2. vérification des performances du Cardiolock1 perturbé par le mouvement cardiaque ;
3. compensation et estimation d'une valeur approchée de l'effort cardiaque $\vec{f}(t)$;
4. analyse de la stabilité du comportement en boucle fermée.

I Modélisation du Cardiolock1

I.A – Évaluation de l'espace de travail

Objectif

Vérifier, d'une part, les capacités de l'actionneur et du dispositif bielle-manivelle à répondre aux exigences du cahier des charges ; et d'autre part, la compatibilité avec le cahier des charges du comportement de la tige flexible **5** lorsque s'exerce l'effort cardiaque. On établit pour cela, le calcul de la déformée de la tige mesurée à partir de la position de référence obtenue pour un déplacement $x_{A\text{ex}}$ de l'actionneur piézoélectrique.

On envisage l'évolution quasi-statique du système à partir de la configuration dite de repos (pour laquelle les paramètres α, β, γ sont égaux à zéro) afin de déterminer l'espace de travail.

I.A.1) Détermination du déplacement extremum du point E dû à l'actionneur piézoélectrique

On calcule les expressions de λ et γ en fonction de α et des paramètres géométriques afin d'en déduire le déplacement du point C puis du point E.

a) Écrire la fermeture géométrique de la chaîne fermée **0-1-2-3-4-0** et en déduire le système d'équations liant λ, α, γ aux paramètres géométriques a, L_1, L_3 et d_1. Linéariser ce système et exprimer λ et γ en fonction de α.

b) Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos, en déduire l'expression du déplacement $x_A = \lambda - \lambda_0$ en fonction de α et de d_1. Donner le signe de x_A permettant le rattrapage d'un déplacement positif selon $\vec{y}_0$ de l'extrémité E de la tige **5**. On note $x_{A\text{ex}}$ la valeur égale à -130 μm, déterminer les expressions de γ et α dans ce cas, elles seront notées respectivement γ_{ex} et α_{ex}. Faire les applications numériques.

c) Exprimer en fonction de L_1 et α le déplacement y_C du point C selon $\vec{y}_0$. Faire l'application numérique pour $\alpha = \alpha_{\text{ex}}$, on notera $y_{C\text{ex}}$ cette valeur numérique. En déduire le déplacement extrémal du point E, noté $y_{E\text{ex}}$.

I.A.2) Détermination du déplacement du point E dû à l'effort cardiaque

Le stabilisateur actif est figé dans la position obtenue pour $\alpha = \alpha_{\text{ex}}$. On envisage alors l'évolution de la tige **5** sous l'effet du seul effort $\vec{f}(t) = f_0\vec{y}_0$ avec l'objectif d'évaluer l'espace de travail du robot (*i.e* évaluer le déplacement du point E). On note x l'abscisse d'un point N de l'axe de la tige **5** ($x \in [0, L_5]$).

a) Montrer que la tige **5** n'est soumise qu'à un état de flexion simple : on montrera pour cela que la seule composante de l'effort à considérer est donnée par $\vec{f}(t) = f_0\vec{y}_5$ (voir **figure 8**).

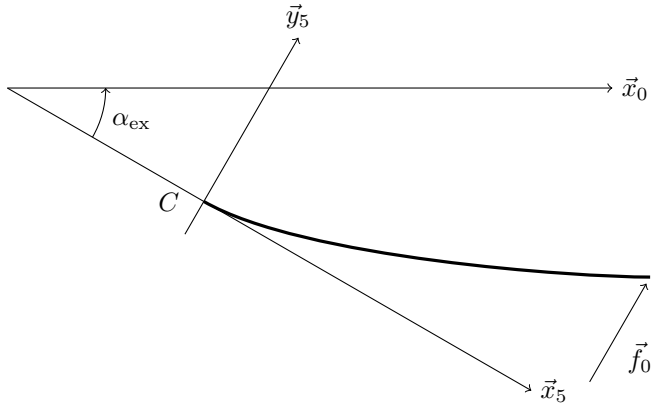


Figure 8 Déformation de la tige **5** sous l'action de $f_0\vec{y}_5$

b) Donner l'expression de cette déformée $y(x)$ en fonction de f_0, x, E_5, I et L_5 (E_5 et I sont respectivement le module d'Young et le moment quadratique d'une section de la tige par rapport à l'axe $(N, \vec{z}_5)$). En déduire alors le déplacement $y(L_5)$ du point E en fonction de f_0, E_5, L_5 et I. Faire l'application numérique pour $f_0 = 4$ N. On donne $E_5 = 1{,}86 \times 10^5$ MPa et $I = 490{,}625$ mm^4.

c) En déduire la valeur maximale f_{0max} de l'effort cardiaque admissible par le Cardiolock1.

d) Citer d'autre(s) méthode(s) pouvant être utilisée(s) par l'ingénieur pour conduire l'étude précédente.

BY-NC-SA

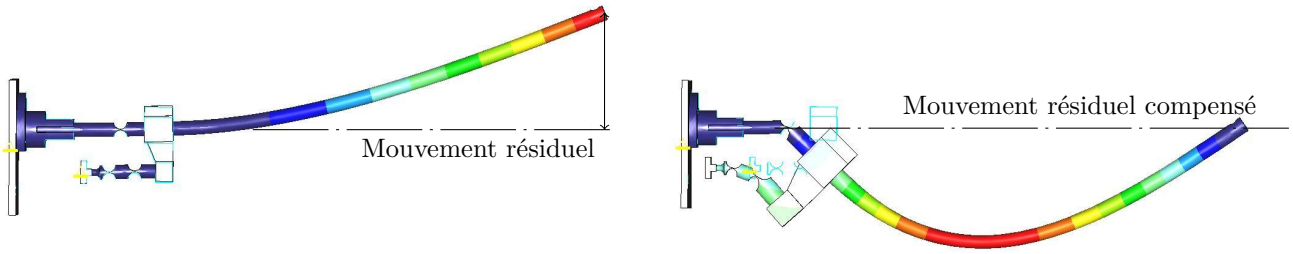


Figure 9 Compensation du mouvement résiduel

I.A.3) Détermination de l'espace de travail

Conclure sur la capacité du Cardiolock1 à compenser le déplacement résiduel maximal dû à l'effort cardiaque. Préciser les limites des résultats obtenus et les éléments de modélisation que l'on pourrait remettre en cause.

I.B – Modélisation et correction du comportement de l'actionneur piézoélectrique

I.B.1) Mise en place d'un modèle équivalent à l'actionneur piézoélectrique

Objectif

Modéliser la boucle de l'actionneur piézoélectrique et régler le correcteur permettant de limiter ses non linéarités. Déterminer l'équation de récurrence à implanter dans le microcontrôleur de la carte de commande.

L'actionneur piézoélectrique utilisé doit permettre de compenser le déplacement résiduel tout en ayant un temps de réponse le plus faible possible devant celui du Cardiolock1. On propose de modéliser puis de corriger le comportement de cet actionneur afin de respecter le temps de réponse proposé dans l'extrait du cahier des charges.

Hypothèses

- La rigidité du ressort équivalent à la structure agissant contre l'actionneur est faible devant celle de l'actionneur : le comportement de l'actionneur est indépendant de l'effort résistant qui lui est appliqué.
- L'actionneur piézoélectrique est modélisé par le schéma électrique équivalent **figure 10**.

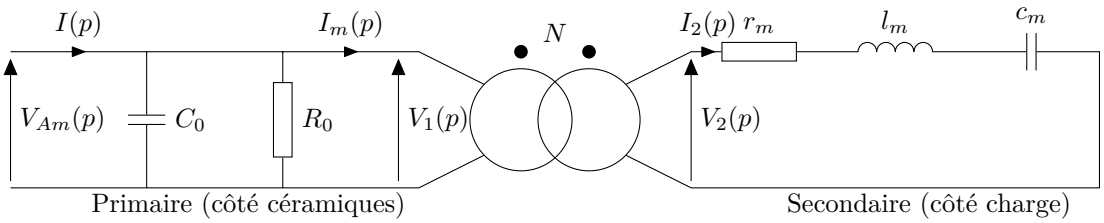


Figure 10 Schéma équivalent de l'actionneur piézoélectrique mécaniquement chargé

Grandeur		Valeurs pour l'APA®120ML
C_0	capacité statique	20 μF
R_0	résistance modélisant les pertes diélectriques	20 kΩ
r_m	résistance modélisant les pertes par déformation	132,8 Ω
c_m	capacité modélisant l'élasticité	0,093 μF
l_m	inductance modélisant la masse effective	39 mH
N	rapport de transformation (facteur de force)	$N = \frac{V_2}{V_1} = 1{,}55$
I	courant absorbé (A)	
V_{Am}	tension appliquée (V)	

a) Montrer que les expressions littérales de R_m, L_m et C_m du modèle vu du primaire **figure 11**, sont : $R_m = \frac{r_m}{N^2}$, $L_m = \frac{l_m}{N^2}$ et $C_m = N^2 c_m$.

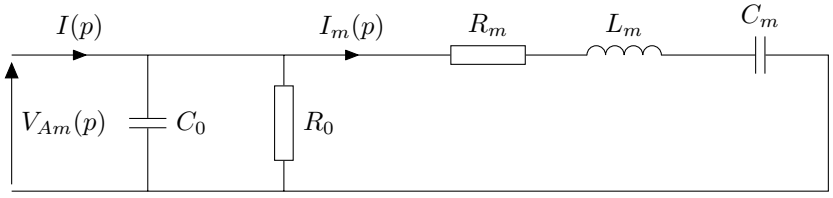


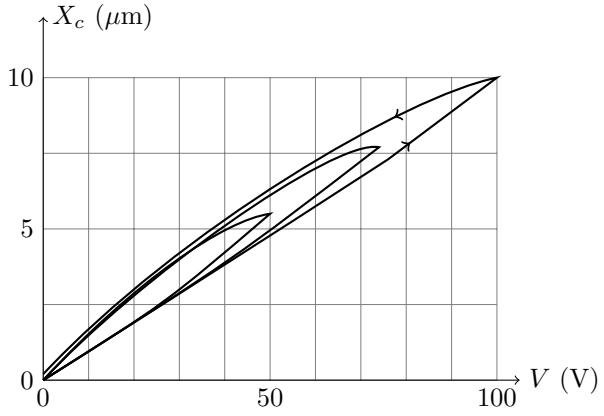
Figure 11 Modèle vu des bornes des céramiques piézoélectriques

BY-NC-SA

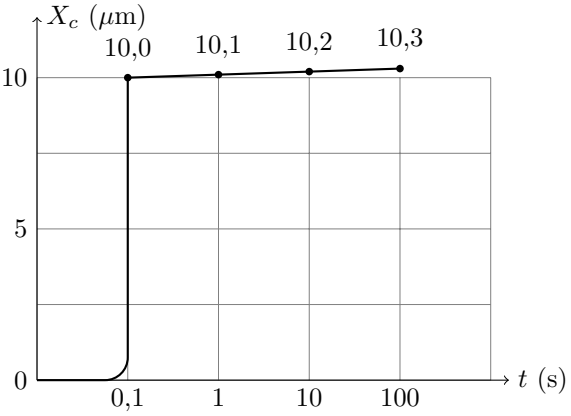
La fonction de transfert de l'actionneur piézoélectrique est défini par : $M(p) = \dfrac{X_c(p)}{V_{Am}(p)} = \dfrac{1}{N}\dfrac{q_m(p)}{V_{Am}(p)}$, où $q_m(p)$ représente la charge du condensateur C_m et $X_c(p)$ le déplacement des céramiques.

b) Déterminer la fonction de transfert $M(p)$. Mettre $M(p)$ sous forme canonique puis, identifier ses paramètres caractéristiques.

Le modèle linéaire de l'actionneur piézoélectrique établi précédemment ne permet pas de décrire entièrement son comportement. En effet, il faut ajouter deux types de non linéarités inhérentes aux matériaux piézoélectriques :
- l'*hystérésis* se traduit par une variation du déplacement. Celle-ci peut atteindre de 2% à 10% de la tension appliquée aux bornes de l'actionneur ;
- le *fluage* se traduit par une élongation lente de l'actionneur sous une consigne de tension constante. La dérive est de l'ordre de 1% du dernier déplacement commandé par décade de temps.



Courbes d'hystérésis d'un actionneur piézoélectrique pour différentes tensions d'excitation



Dérive du déplacement après un changement de 10 μm

Figure 12 Représentation des phénomènes d'hystérésis et de fluage

Afin de limiter l'influence de ces non linéarités sur la précision et la répétabilité, un bouclage à l'aide d'un capteur de position est envisagé. Pour simplifier l'étude, les non linéarités seront représentées par une perturbation de spectre basse fréquence.

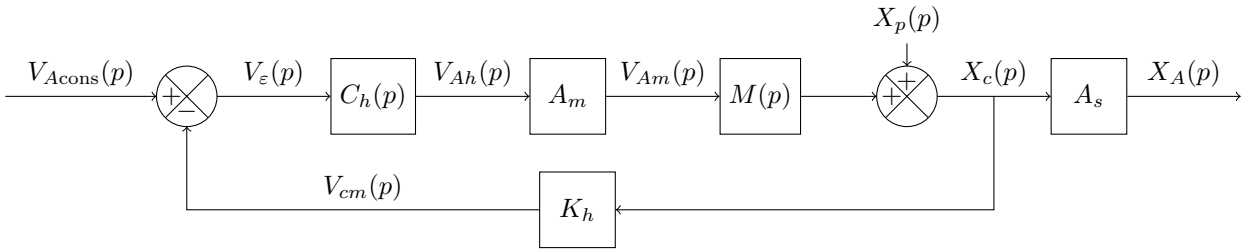


Figure 13 Schéma bloc de la commande de l'actionneur piézoélectrique

Notations des transformées de Laplace
- $V_{Acons}(p)$: tension image de la consigne en déplacement de l'actionneur
- $V_{cm}(p)$: tension image du déplacement des céramiques
- $V_{Ah}(p)$: tension de commande de l'amplificateur de puissance
- $V_{Am}(p)$: tension de commande de l'actionneur piezoélectrique
- $X_P(p)$: perturbation de spectre basse fréquence due au fluage et à l'hystérésis
- $X_c(p)$: déplacement des céramiques
- $X_A(p)$: déplacement du point A
- $C_h(p)$: fonction de transfert du correcteur
- $M(p)$: fonction de transfert de l'actionneur piézoélectrique $M(p) = \dfrac{0{,}145 \times 10^{-6}}{3{,}63 \times 10^{-9}p^2 + 1{,}24 \times 10^{-5}p + 1}$
- A_m : gain de l'amplificateur de puissance $A_m = 20$
- K_h : gain du capteur de position, en V/m
- A_s : gain de la structure amplificatrice de l'actionneur $A_s = -6{,}5$

BY-NC-SA

I.B.2) Modélisation de la boucle de retour

La mesure de déplacement est réalisée grâce à quatre jauges de déformations montées sur les céramiques piézoélectriques de l'APA®120ML (voir **figure 14**). Le conditionnement du signal des jauges de déformations se fait à l'aide d'un pont de Wheatstone représenté **figure 15**. Il permet d'obtenir une tension image de la déformation longitudinale des céramiques piézoélectriques.



Figure 14 Jauges de déformations

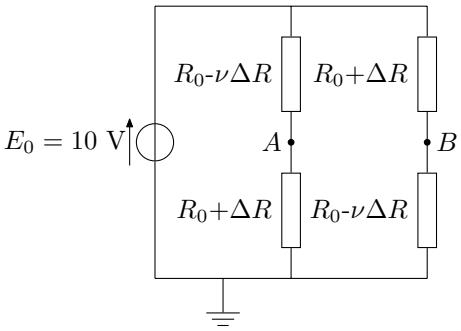


Figure 15 Conditionneur des jauges de déformations

Notations

La tension d'alimentation du pont de Wheatstone est de 10 V. On note R_0 la valeur de la résistance d'une jauge au repos. La variation de la résistance de chaque jauge est liée à sa déformation $\Delta L/L_0$ par le facteur de jauge G_F : $\Delta R/R_0 = G_F(\Delta L/L_0)$. On donne $L_0 = 16$ mm (longueur d'une jauge en absence de déformation), $\nu = 0{,}31$ (coefficient de Poisson), $R_0 = 350\ \Omega$, $G_F = 2{,}1$.

a) Exprimer la tension u_{AB} en fonction de E_0, R_0, ΔR et ν. Simplifier l'expression obtenue en considérant $\Delta R/R_0 \ll 1$.

Pour un déplacement correspondant à la course maximale de l'actionneur $X_A = -130\ \mu$m, la déformation est $\Delta L/L_0 = 0{,}11\%$.

b) Calculer la valeur numérique de la tension U_{AB} pour ce déplacement de $X_A = -130\ \mu$m.

Afin d'être compatible avec l'électronique de commande, le niveau de ce signal doit atteindre 7,5 V pour un déplacement $X_A = -130\ \mu$m. Le signal de sortie du conditionneur est alors amplifié par un amplificateur d'instrumentation (voir **figure 16**) à base d'amplificateurs linéaires intégrés (ALI) alimentés en $+15$ V/-15 V et supposés idéaux.

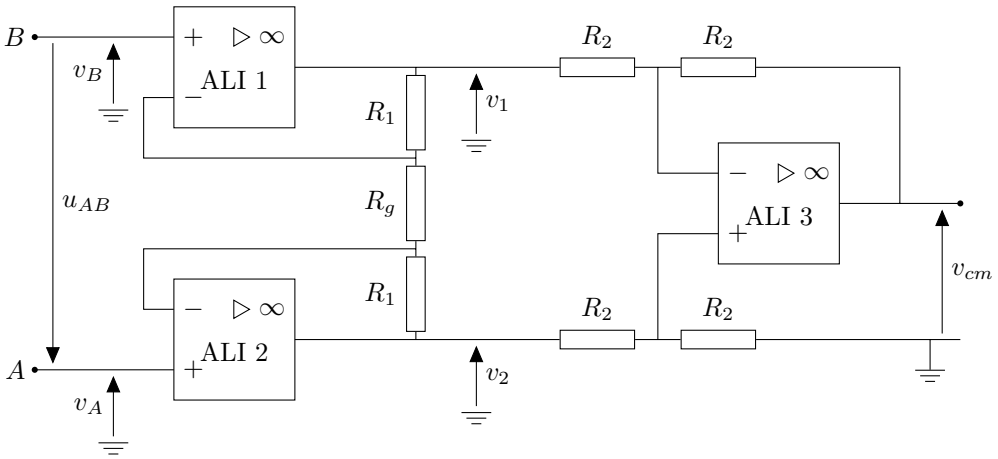


Figure 16 Structure de l'amplificateur d'instrumentation

c) Déterminer d'une part la relation entre $v_{cm}(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$ puis, d'autre part la relation entre $u_{AB}(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$. En déduire l'expression littérale de l'amplification du montage de la **figure 16**.

On donne $R_1 = 24{,}7$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, $R_g = 100\ \Omega$.

d) Calculer la valeur numérique de la tension V_{cm}, pour un déplacement $X_A = -130\ \mu$m et indiquer si ce signal est compatible avec l'électronique de commande.

BY-NC-SA

I.B.3) Réglage du correcteur $C_h(p)$

Afin de limiter l'impact des non linéarités décrites précédemment, le correcteur suivant est envisagé :

$$C_h(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

a) Indiquer la nature du correcteur ainsi que son intérêt dans le cas présent.

Les diagrammes de Bode de la boucle ouverte corrigée avec $K_i = 1$ et $\omega_i = 1/T_i = \omega_0/10$, où ω_0 est la pulsation de coupure de la boucle ouverte, sont représentés **figure 17**.

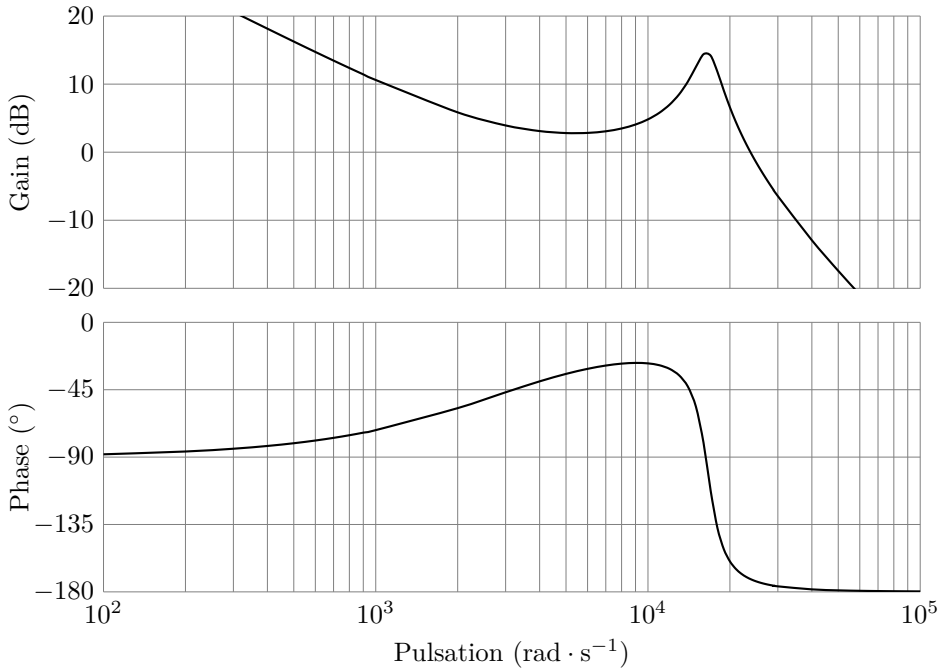


Figure 17 Diagrammes de Bode de la boucle ouverte pour $K_i = 1$

Des simulations pour différentes valeurs du gain K_i ont été réalisées afin de déterminer le meilleur compromis entre rapidité et stabilité. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Marge de Phase (°)	**6,5**	**11**	**15**	**25**	**45**	**65**	**94**	**99**
Temps de réponse à 5% (ms)	3	2,5	2,7	3	4,3	5,4	16	6,7

b) Déterminer, à l'aide du tableau précédent, la valeur de la marge de phase permettant le respect du temps de réponse à 5% défini dans l'extrait du cahier des charges, tout en assurant une stabilité maximale. En déduire la valeur numérique du gain K_i.

I.B.4) Implantation du correcteur $C_h(p)$

La carte de commande de l'APA®120ML est gérée par un microcontrôleur. Son schéma, limité à la chaîne numérique, est représenté **figure 18**.

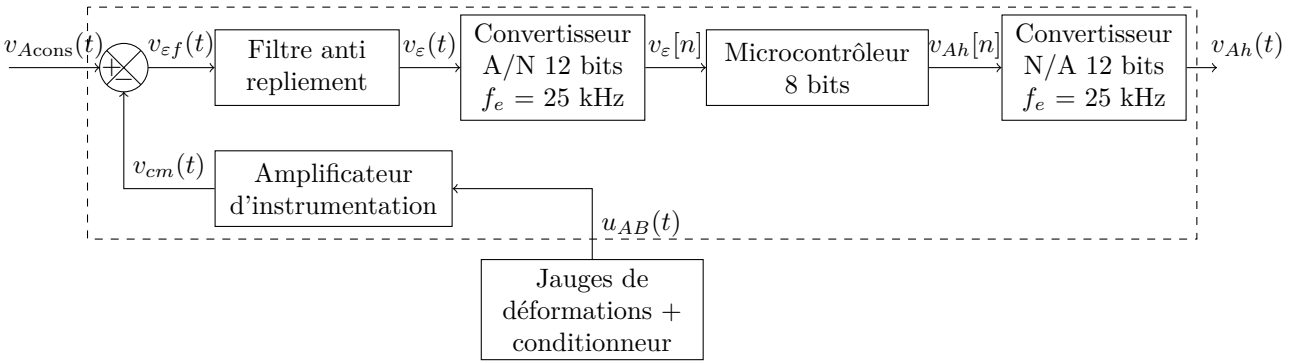


Figure 18 Chaîne numérique de la carte de commande de l'APA®120ML

Notations

La période d'échantillonnage des signaux, notée T_e, est de 0,04 ms. Les valeurs de $v_\varepsilon(t)$ et de $v_{Ah}(t)$ à l'instant nT_e sont notées $v_\varepsilon[n]$ et $v_{Ah}[n]$. Les valeurs de $v_\varepsilon(t)$ et de $v_{Ah}(t)$ à l'instant $(n-1)T_e$ sont notées $v_\varepsilon[n-1]$ et $v_{Ah}[n-1]$.

BY-NC-SA

À partir de la valeur numérique de l'écart $v_\varepsilon[n]$ et d'une équation de récurrence, le signal de commande numérique $v_{Ah}[n]$ est généré. La numérisation de l'écart est réalisée grâce à un convertisseur A/N 12 bits de pleine échelle 8,5 V. Un filtre anti-repliement défini par son gabarit **figure 19** (les zones grisées sont interdites) est placé en amont de ce convertisseur. Il permet de limiter les effets du repliement de spectre, en atténuant les fréquences hors du spectre utile à une valeur inférieure au demi-quantum du convertisseur A/N.

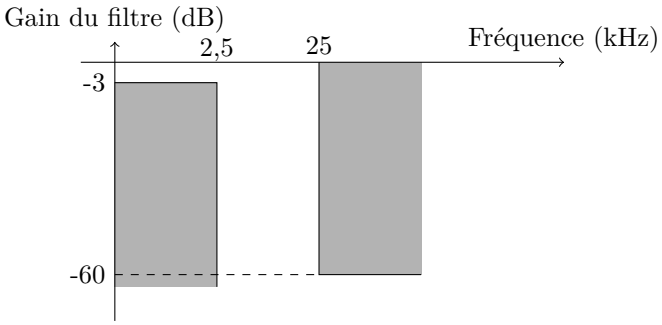


Figure 19 Gabarit du filtre anti-repliement

a) Indiquer puis justifier la nature du filtre ainsi que sa fréquence de coupure à -3 dB.

b) Déterminer l'ordre minimal du filtre permettant de respecter ce gabarit.

Le filtre anti-repliement est réalisé à partir de la mise en cascade de cellules élémentaires d'ordre 1 et 2 alimentées en $+15$ V/ $-$ 15 V. Une de ces cellules est représentée **figure 20**. L'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal.

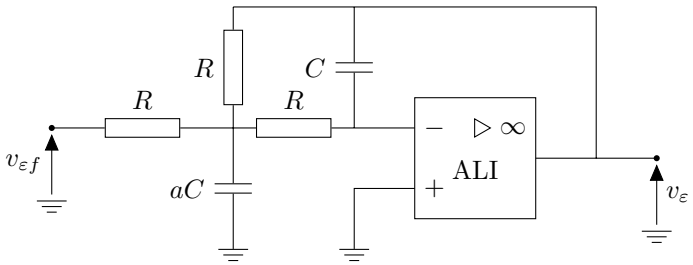


Figure 20 Cellule élémentaire du filtre anti-repliement

c) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_\varepsilon(j\omega)}{\underline{V}_{\varepsilon f}(j\omega)}$ de cette cellule élémentaire en fonction de a, R, C et ω puis, la mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{-1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q}\frac{j\omega}{\omega_0} + 1}$ où ω_0 représente la pulsation de cassure du filtre et Q le facteur de qualité.

d) Calculer la valeur numérique de a permettant d'obtenir un facteur de qualité $Q = 1$.

e) En déduire la valeur numérique du produit RC permettant d'obtenir la fréquence de cassure définie par le gabarit.

Pour implanter dans le microcontrôleur le correcteur $C_h(p)$ déterminé en **I.B.3**, il faut déterminer une équation de récurrence permettant d'approcher son comportement en numérique. L'influence du filtre anti-repliement et de l'échantillonnage sur la marge de phase est considérée négligeable.

f) Donner, pour des conditions initiales nulles, l'équation différentielle du correcteur $C_h(p)$ défini en **I.B.3** sous la forme $a\frac{dv_{Ah}(t)}{dt} = bv_\varepsilon(t) + c\frac{dv_\varepsilon(t)}{dt}$.

g) Intégrer cette équation différentielle entre les deux instants d'échantillonnage $(n-1)T_e$ et nT_e.

La méthode des trapèzes, illustrée **figure 21**, est utilisée pour approcher la valeur de l'intégrale $\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} s(t)dt$.

h) Justifier l'approximation suivante :

$$\int_{(n-1)T_e}^{nT_e} s(t)\,dt \approx \frac{T_e}{2}\left(s[n] + s[n-1]\right)$$

i) Déterminer, en utilisant l'approximation par la méthode des trapèzes, l'équation de récurrence du correcteur numérique sous la forme $v_{Ah}[n] = Av_{Ah}[n-1] + Bv_\varepsilon[n] + Cv_\varepsilon[n-1]$.

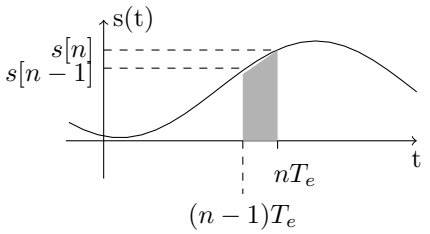


Figure 21 Illustration de la discrétisation par la méthode des trapèzes

BY-NC-SA

Dans la suite, les coefficients quantifiés A, B et C sont les suivants : $A = 1$; $B = \dfrac{1084}{4096}$; $C = \dfrac{-964}{4096}$

Le microcontrôleur utilisé, possède un nombre d'instructions limité. Le temps de cycle pour réaliser une instruction élémentaire est de 100 ns. Les fonctions nécessaires pour implanter l'équation de récurrence précédente sont décrites ci-après avec le nombre de cycles nécessaires pour leur exécution complète.

Fonction	Description	Nombre de cycles
INITIALISATION	Cette fonction initialise toutes les variables du programme et configure les CAN, CNA.	15
ACQUÉRIR ENTRÉE $M \leftarrow E$	Cette fonction fait une acquisition et une conversion de l'entrée du CAN puis, sauvegarde la valeur numérisée (E) en mémoire RAM (M).	50
ÉCRIRE SORTIE $S \leftarrow M$	Cette fonction écrit la valeur (S) à l'entrée du CNA à partir d'une valeur située en mémoire RAM (M) puis, réalise la conversion.	45
ÉCRIRE MÉMOIRE $M \leftarrow V$	Cette fonction sauvegarde une valeur (V) en mémoire RAM (M)	2
MULTIPLIER N_1 PAR N_2 $M \leftarrow N_1 \times N_2$	Cette fonction multiplie deux nombres (N_1) et (N_2) de 12 bits. Le résultat, ramené sur 12 bits, est sauvegardé en mémoire RAM (M).	80
ADDITIONNER N_1 ET N_2 $M \leftarrow N_1 + N_2$	Cette fonction additionne deux nombres de 12 bits.	4

j) Compléter, sur feuille, l'organigramme permettant d'implanter l'équation de récurrence du correcteur numérisé trouvée précédemment.

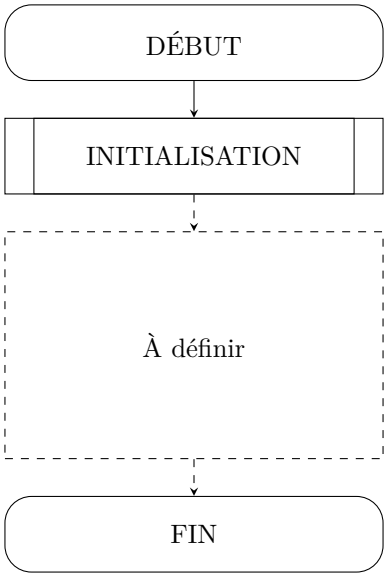


Figure 22 Organigramme de l'équation de récurrence

k) En déduire le temps nécessaire pour calculer $v_{Ah}[n]$ puis, conclure sur la possibilité de réaliser le correcteur avec ce microcontrôleur. On rappelle que la période d'échantillonnage, notée T_e, est de 0,04 ms.

BY-NC-SA

I.C.1) Calcul des fonctions de transfert

Objectif

Mise en place des fonctions de transfert caractérisant le modèle pour la commande du stabilisateur.

Le stabilisateur est dans toute la suite de l'étude, modélisé par un assemblage de **solides rigides** reliés par des liaisons pivot* (y compris la liaison entre **1** et **5**, dont la raideur est notée $K_2 = 742{,}79\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$, et supportant de plus un frottement visqueux de coefficient $f_2 = 0{,}15\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$). Ce stabilisateur possède deux degrés de liberté x_A et β : le premier qui est relatif à la translation de l'actionneur piézoélectrique contrôle la rotation α et le second qui est non actionné est relatif à la rotation β de la tige par rapport au solide **1**. Ce stabilisateur est soumis par ailleurs à l'effort cardiaque $\vec{f}(t) = f(t)\vec{y}_0$ (t représente le temps) à l'extrémité E. La tige **5** est assimilée à une tige dont le diamètre D_5 est négligeable devant la longueur L_5.

La valeur élevée de la raideur de l'actionneur permet de considérer que l'angle α est asservi beaucoup plus rapidement que l'angle β, en conséquence, α sera supposé connu et on ne retiendra pour la mise en place de ce modèle que l'équation décrivant le comportement dynamique de β. L'hypothèse faite **page 2** sur les petits déplacements reste valide.

a) Exprimer la relation liant le déplacement y du point E à la mesure des angles α et β exprimés en radians et aux dimensions L_1 et L_5.

b) Dans le but d'écrire l'équation différentielle vérifiée par α et β, on souhaite appliquer le théorème du moment dynamique au solide **5**, au point C et en projection sur $\vec{z}_0$. On supposera que la tige **5** peut être assimilée à une tige de diamètre négligeable devant sa longueur. Pour cela :

1. Exprimer le moment en C des efforts extérieurs à **5** en projection sur $\vec{z}_0$ et en fonction de K_2, f_2, f, β, $\dot{\beta}$ et L_5.
2. Calculer le moment d'inertie I_5 de la tige **5** par rapport à l'axe $(C, \vec{z}_0)$ en fonction de m_5 et L_5.
3. Montrer que le moment cinétique de la tige **5** au point C et en projection sur $\vec{z}_0$ est donné par

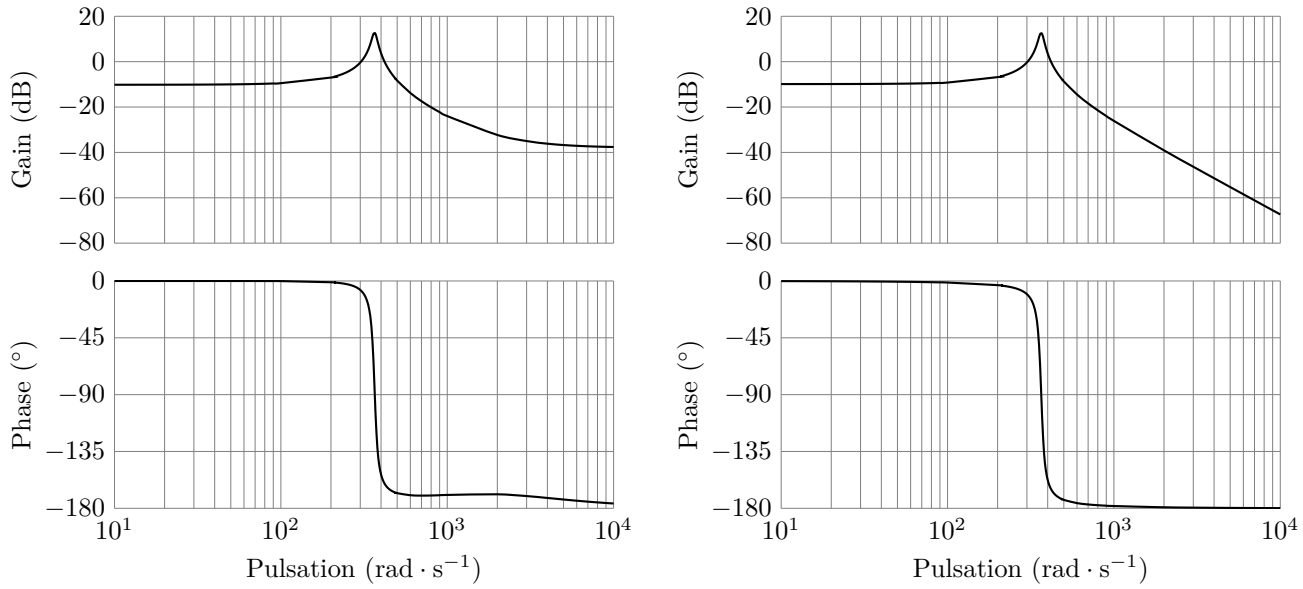
$$\vec{\sigma}(C, \mathbf{5}/\mathbf{0}) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{m_5 L_5^2}{3} + \frac{m_5 L_5 L_1}{2}\right)\dot{\alpha} + \frac{m_5 L_5^2}{3}\dot{\beta}$$

4. En déduire la composante du moment dynamique : $\vec{\delta}(C, \mathbf{5}/\mathbf{0}) \cdot \vec{z}_0$. On exprimera le résultat sous la forme $M_{22}\ddot{\beta} + f_2\dot{\beta} + K_2\beta = L_5 f - M_{21}\ddot{\alpha}$, il appartiendra au candidat de définir les valeurs littérales de M_{21} et de M_{22}.

c) À partir des relations trouvées en **a** et **b** et en notant respectivement $Y(p)$, $\alpha(p)$ et $F(p)$ les transformées de Laplace des fonctions $y(t)$, $\alpha(t)$ et $f(t)$, montrer que $Y(p) = G(p)\alpha(p) + H(p)F(p)$ avec

$$G(p) = \frac{\frac{(L_1+L_5)M_{22} - L_5 M_{21}}{K_2}p^2 + \frac{L_1+L_5}{K_2}f_2 p + (L_1+L_5)}{\frac{M_{22}}{K_2}p^2 + \frac{f_2}{K_2}p + 1} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{\frac{L_5^2}{K_2}}{\frac{M_{22}}{K_2}p^2 + \frac{f_2}{K_2}p + 1}$$

d) Indiquer, en s'aidant des réponses fréquentielles données **figure 23** et du domaine fréquentiel de battement cardiaque, le domaine pour lequel le numérateur de $G(p)$ peut être réduit à un gain pur.



a — le numérateur de $G(p)$ est complet

b — le numérateur de $G(p)$ est réduit à un gain pur

Figure 23 Diagrammes de Bode de $G(p)$

BY-NC-SA

I.C.2) Étude de l'influence du myocarde sur le comportement du Cardiolock1

Objectif

À partir d'une modélisation de l'effort cardiaque, commenter l'influence du myocarde sur le comportement dynamique du Cardiolock1 étudié en **I.C.1**.

L'analyse des résultats expérimentaux montre que le comportement de la zone stabilisée peut être représenté, en première approximation, par un ensemble masse-ressort-amortisseur (m_c, K_c, f_c). Ce modèle, global au sens où sont pris en compte à la fois les comportements du muscle cardiaque et du sang contenu dans ses cavités (la pression du sang évoluant au cours du temps), est défini par la **figure 24**, à savoir, une masse équivalente à la zone stabilisée soumise à l'action d'un amortisseur. Le déplacement de la paroi cardiaque est noté $d_c(t)$.

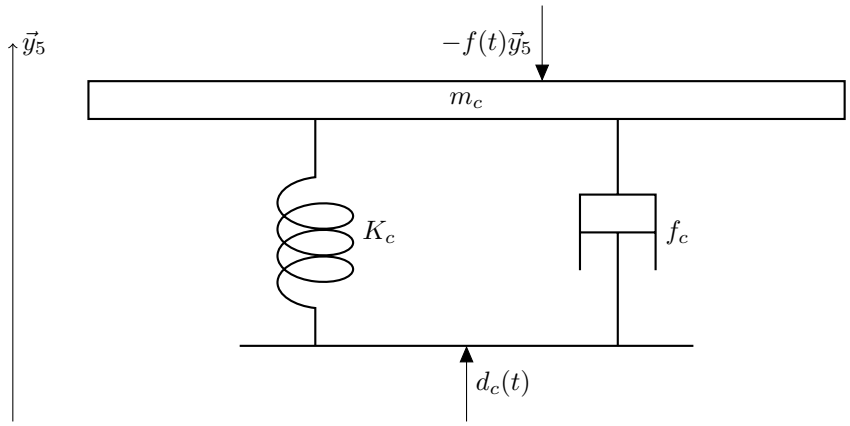


Figure 24 Modélisation du myocarde

La prise en compte ou non de l'influence du myocarde dans le modèle pour la commande peut être représentée par le tableau suivant :

	Sans myocarde	**Avec myocarde**
Gain statique (mm)	0,320	0,305
Pulsation propre (rad/s)	366	307
Coefficient d'amortissement	0,037	0,115

Commenter l'influence du muscle cardiaque sur le comportement du système et expliquer en quoi il peut être légitime de retenir comme modèle pour la commande celui défini en **I.C.1**.

II Modèle pour la commande et vérification des performances

Objectif

L'objectif de cette partie est l'évaluation des performances du Cardiolock1 du modèle pour la commande défini en **I.C.1**.

Dans toute la suite de l'étude, on s'intéresse au modèle défini en **I.C.1** pour lequel l'influence du comportement spécifique du muscle cardiaque n'est pas prise en compte. L'effort exercé par le muscle cardiaque sur la tige **5** est $f(t)$, on suppose pour simplifier que cet effort peut être représenté par $f(t) = f_0 \sin \omega_c t$ avec $\omega_c = 5$ rad $\cdot$ s^{-1}.

À partir de l'étude du modèle dynamique établi en **I.C.1**, on retient pour modèle pour la commande celui défini à partir de $Y(p) = G(p)\alpha(p) + H(p)F(p)$.

$G(p)$ et $H(p)$ sont exprimés sous la forme :

$$G(p) = \frac{K}{M_{22}p^2 + f_2 p + K_2} = \frac{N_1}{D(p)} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{L_5^2}{M_{22}p^2 + f_2 p + K_2} = \frac{N_2}{D(p)}$$

Avec les valeurs numériques $K = 238$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ rad^{-1}, $M_{22} = 0{,}0056$ kg $\cdot$ m^2, $f_2 = 0{,}15$ N $\cdot$ m $\cdot$ s $\cdot$ rad^{-1} et $K_2 = 743$ N $\cdot$ m $\cdot$ rad^{-1}. L'architecture globale du modèle pour la commande du Cardiolock1 est représentée par le schéma bloc de la **figure 25**.

Dans le schéma de la **figure 25**, $Y_{\text{cons}}(p)$ est la consigne en déplacement de l'extrémité E de la tige **5**, B est un gain pur représentant la fonction de transfert du stabilisateur actif tel que $\alpha(p) = BX_A(p)$ avec $B = 33{,}33$ rad $\cdot$ m^{-1}. On rappelle que $X_A(p)$ est la transformée de Laplace du déplacement x_A du point A. $R(p)$ est la fonction de transfert d'un régulateur PI.

BY-NC-SA

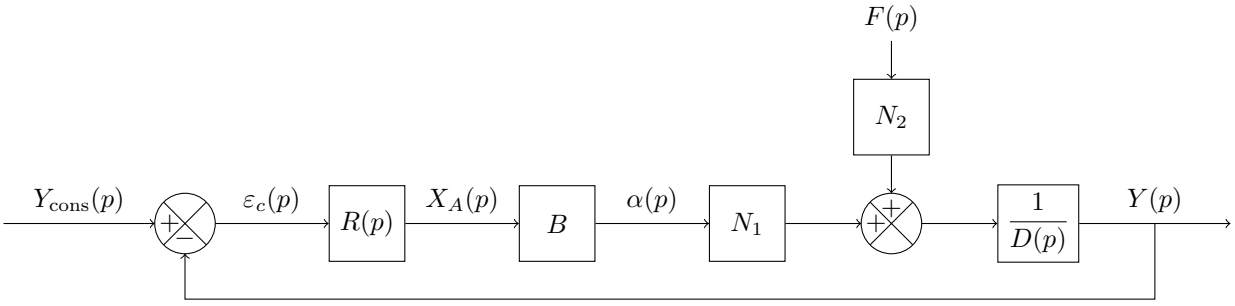


Figure 25 Schéma-bloc du modèle pour la commande du Cardiolock1

II.A – Évaluation des performances du Cardiolock1 perturbé par le mouvement cardiaque

Objectif

Évaluer les performances du Cardiolock1 perturbé par le mouvement cardiaque.

a) Établir, à partir du schéma-bloc de la **figure 25**, la relation liant $\varepsilon_c(p)$ à $Y_{\text{cons}}(p)$, $R(p)$, B, N_1, N_2, $D(p)$ et $F(p)$ et la mettre sous la forme $\varepsilon_c(p) = \varepsilon_{c1}(p) + \varepsilon_{c2}(p) = J(p)Y_{\text{cons}}(p) + K(p)F(p)$.

b) Donner et justifier la valeur de l'écart statique ε_{c1} en réponse à un échelon de consigne $Y_{\text{cons}}(p)$.

Le déplacement résiduel de la « zone cible », dû à la perturbation $f(t)$, est évalué en étudiant le module de l'écart $|\underline{\varepsilon}_{c2}(j\omega)| = |\underline{K}(j\omega)||\underline{F}(j\omega)|$ en régime permanent. On donne **figure 26**, le diagramme de gain de $K(p)$.

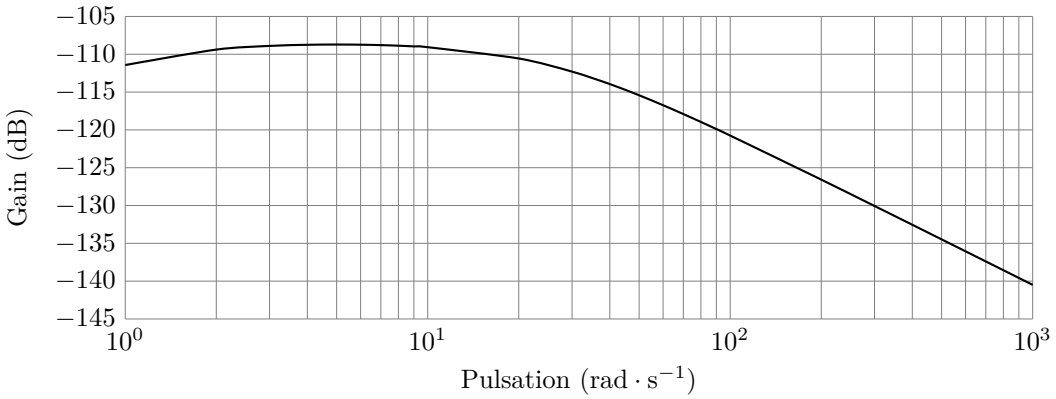


Figure 26 Diagramme de gain de $K(p)$

c) Calculer la valeur numérique de $|\underline{\varepsilon}_{c2}(j\omega_c)|$ pour la perturbation $f(t)$ d'une amplitude $f_0 = 4$ N.

d) Justifier que, pour un effort d'amplitude $f_0 = 4$ N, le critère énoncé dans l'extrait du cahier des charges est respecté pour tout le domaine fréquentiel des battements cardiaques.

e) Déterminer l'amplitude maximale f_{0max} de l'effort permettant de respecter ce critère puis conclure.

II.B – Évaluation de l'influence du mouvement respiratoire

L'effort exercé sur la tige **5** provient non seulement des battements du cœur mais aussi des mouvements dus à la respiration du patient. L'effort résultant peut-être vu comme la somme d'un effort dû aux mouvements respiratoires et d'un effort composé des mouvements cardiaques et respiratoires modélisé comme une modulation d'amplitude $f(t) = f_{0r}\sin(\omega_r t + \varphi_r) + f_0\sin(\omega_c t)\,(1 + f_{0r}\sin(\omega_r t + \varphi_r))$ avec $f_0 = 4$ N et $\omega_c = 5$ rad · s^{-1}.

Le patient étant placé sous respiration artificielle, la pulsation et l'amplitude de l'effort dû au mouvement respiratoire sont considérées comme connues et constantes : $\omega_r = 1{,}6$ rad · s^{-1} et $f_{0r} = 0{,}3$ N.

a) Indiquer s'il s'agit d'une modulation d'amplitude avec ou sans porteuse ainsi que le taux de modulation.

b) Tracer le spectre de $f(t)$.

c) Commenter l'influence des mouvements dus à la respiration sur le déplacement résiduel puis, conclure sur le choix de considérer uniquement le mouvement cardiaque dans cette étude.

BY-NC-SA

III Construction d'une valeur estimée de $F(p)$

Objectif

La valeur prise par $F(p)$ ne peut être mesurée par un capteur, on propose dans cette partie de mettre en place l'élément de la structure de commande qui permette « d'estimer » la valeur prise par $F(p)$ afin d'améliorer les performances.

III.A – Estimateur « idéal » : évaluation de C_a

On complète le schéma bloc de la **figure 25**, par la prise en compte d'une estimation de la valeur de $F(p)$ représentée par $\hat{F}(p)$. On retient pour cela l'architecture présentée **figure 27**. Dans ce schéma bloc, la fonction de transfert notée C_a est, *a priori*, inconnue.

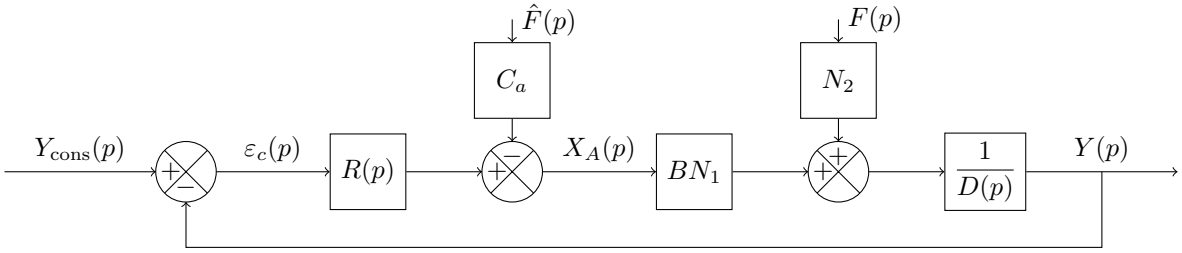


Figure 27 Prise en compte d'une estimation de la valeur de $F(p)$

Déterminer la condition sur C_a, en fonction de N_1, N_2 et B, assurant que l'expression de $Y(p)$ soit indépendante des contributions de $F(p)$ et $\hat{F}(p)$ et faire l'application numérique.

III.B – Estimation de $\hat{F}(p)$: structure de l'estimateur

Objectif

Évaluer les performances du Cardiolock1 corrigé avec l'estimateur.

On retient pour cela la structure représentée **figure 28** construite à partir du schéma-bloc de la **figure 27** à laquelle vient s'ajouter un « estimateur » (défini par l'intérieur du contour en interrompu) qui, à partir des entrées $X_A(p)$ et $Y(p)$ fournit une estimation $\hat{F}(p)$ de $F(p)$.

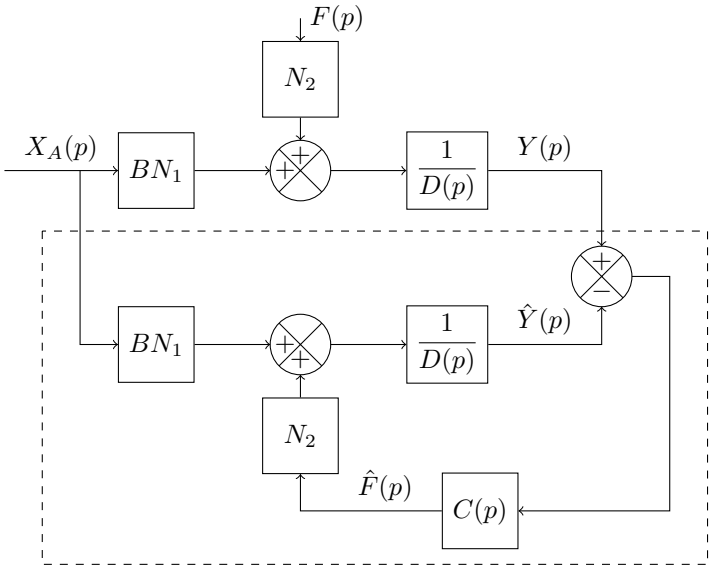


Figure 28 Schéma-bloc du modèle d'estimation de $F(p)$

Après simplifications, l'asservissement de la valeur estimée $\hat{F}(p)$ à $F(p)$ peut être représenté par le schéma-bloc de la **figure 29** où $C(p)$ est la fonction de transfert d'un régulateur PI.

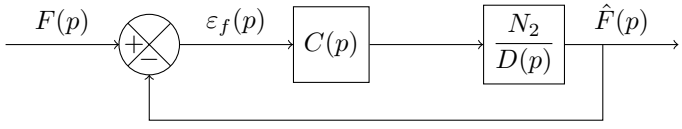


Figure 29 Schéma-bloc de l'asservissement de $\hat{F}(p)$ à $F(p)$

BY-NC-SA

L'atténuation de l'influence de la perturbation apportée par l'asservissement du modèle initial de la **figure 25** est prise égale à 109 dB dans le cas le plus défavorable. L'asservissement de la valeur estimée $\hat{F}(p)$ à $F(p)$ permet d'avoir une atténuation supplémentaire de 26 dB, dans le cas le plus défavorable.

Indiquer, pour un effort d'amplitude $f_0 = 4$ N, si le critère sur le déplacement résiduel est vérifié. Déterminer alors la nouvelle amplitude maximale f_{0max} de l'effort $f(t)$ permettant de respecter ce critère puis conclure.

IV Analyse de la stabilité et conclusion sur l'étude

IV.A – Étude de la stabilité

Objectif

Vérifier que le système avec la boucle interne corrigée de l'estimateur est stable. On envisage pour cela une approche fréquentielle par une étude dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte que l'on admettra être définie par $F_{BO}(p) = -X_A(p)/W(p)$.

Le schéma-bloc du modèle pour la commande défini à la **figure 25** prend la forme donnée **figure 30** obtenue en distinguant les modélisations du Cardiolock1 de celle de l'estimateur.

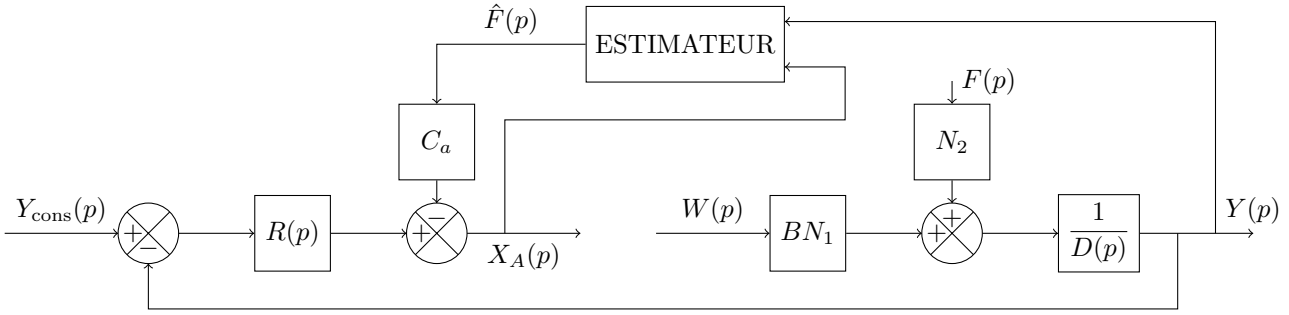


Figure 30 Schéma-bloc du modèle pour la commande

On donne **figure 31**, les diagrammes de Bode de la réponse en boucle ouverte $F_{BO}(p)$.

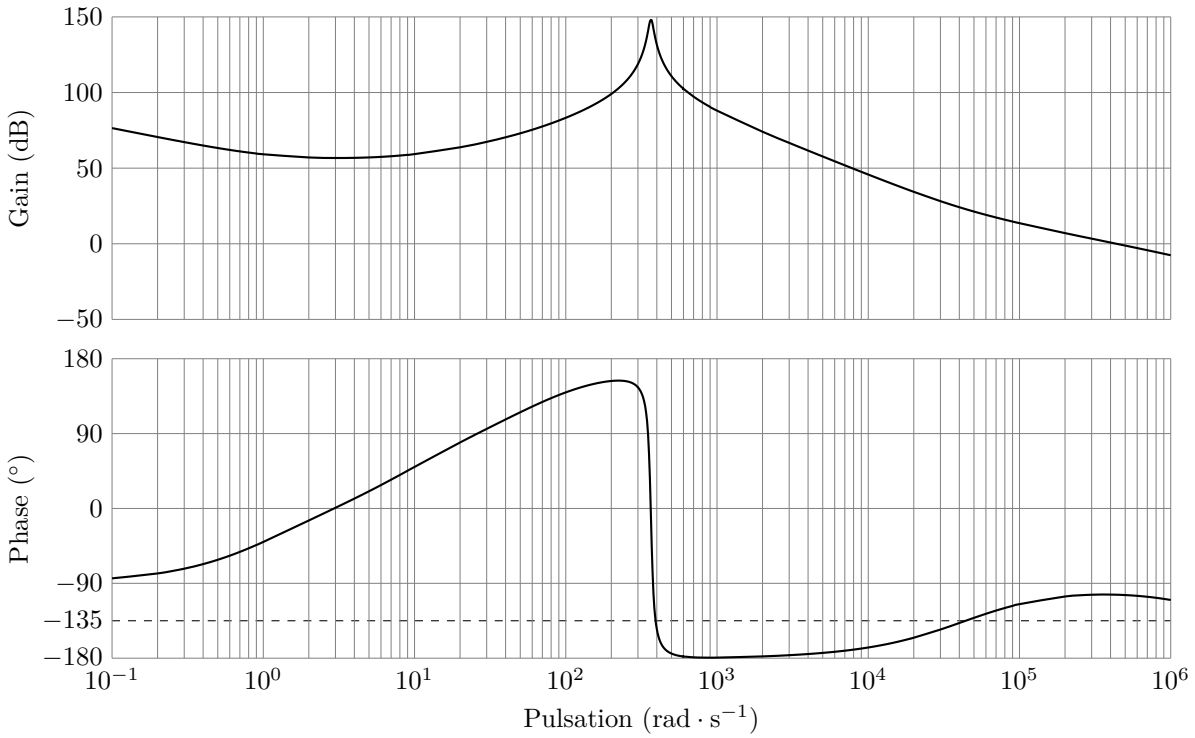


Figure 31 Diagrammes de Bode de la réponse en boucle ouverte

Évaluer la marge de phase puis conclure sur la stabilité du système avec l'estimateur.

IV.B – Conclusion sur l'étude

Énoncer en quelques lignes, une synthèse de l'étude conduite en précisant les limites des résultats obtenus et quelles hypothèses permettraient d'améliorer la modélisation du Cardiolock1.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Correction des systèmes asservis : correcteurs P, PI et à avance de phase
- Circuits électriques dans l'ARQS
- Électronique numérique
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi