Concours Centrale-Supélec, France

Session 2013, filière TSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : réduction des matrices réelles d'ordre 2
- Partie II : réduction de matrices d'ordre 3 ou 4
- Partie III : le théorème de Cayley-Hamilton
- Partie IV : méthodes numériques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2013/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — TSI — 2013

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement complexes), I_n la matrice unité et $\mathcal{O}_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on note $\mathrm{Det}(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A, égale à la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

I Réduction des matrices réelles d'ordre 2

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2 : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

I.A – Généralités

I.A.1) Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \mathrm{Det}(A)$.

I.A.2) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\mathrm{tr}(A)^2 - 4\,\mathrm{Det}(A) \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathbb{A} = {}_0\mathbb{I}_2$$

I.A.3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\mathrm{tr}(A)^2 - 4\,\mathrm{Det}(A) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mathbb{A} = {}_0\mathbb{I}_2$$

I.B – Applications

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 2v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k \end{cases}$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$.

I.B.1) Trouver une matrice A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k : $X_{k+1} = AX_k$.

I.B.2) Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer X_k en fonction de A, X_0 et k.

I.B.3) Prouver que A est diagonalisable puis déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

I.B.4) Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de A^k en fonction de k.

I.B.5) En déduire l'expression de u_k et v_k en fonction de k.

II Réduction de matrices d'ordre 3 ou 4

II.A – Le cas n = 3

On définit la matrice J par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.A.1) Calculer J^2 et J^3.

Soit k dans $\mathbb{N}$. Préciser J^k en fonction de k.

BY-NC-SA

II.A.2) On note j le nombre complexe égal à $e^{2i\pi/3}$.

Rappeler sans justification la valeur de $1 + j + j^2$.

II.A.3) Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.

II.A.4) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :

$$J = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix} P^{-1}$$

II.A.5) Soient trois nombres complexes a, b et c. On pose

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2.

b) En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes a, b et c.

c) Préciser les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$.

d) Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et du nombre complexe j sous la forme d'un produit.

II.A.6) On pose $E = \{A(a,b,c)\,;(a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Donner la dimension de E en justifiant avec soin.

II.B – Le cas $\mathbf{n \geqslant 3}$ *quelconque*

Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 3 : $n \geqslant 3$.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par : $u(e_2) = e_1, u(e_3) = e_2, \ldots, u(e_n) = e_{n-1}$ et $u(e_1) = e_n$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\},\ \text{on a } u(e_k) = e_{k-1} \text{ tandis que } u(e_1) = e_n$$

II.B.1) On note U la matrice de u dans la base canonique e de $\mathbb{C}^n$. Expliciter la matrice U.

II.B.2) On note ω une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et x_ω le vecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$x_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k$$

Calculer $u(x_\omega)$ en fonction de ω et de x_ω.

II.B.3) Montrer que u est diagonalisable. On précisera une base de vecteurs propres pour u.

II.B.4) Que peut-on dire de u^n ?

II.C – Le cas $\mathbf{n = 4}$ *quelconque*

Dans toute cette partie, on choisit $n = 4$.

II.C.1) Expliciter U, U^2, U^3, U^4 où U est la matrice définie dans la question précédente.

II.C.2) On note (a,b,c,d) une famille de 4 complexes et on pose :

$$V = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Montrer que V est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Donner une base de vecteurs propres et préciser les valeurs propres de la matrice V en fonction des nombres complexes a, b, c, d et i.

BY-NC-SA

III Le théorème de Cayley-Hamilton

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0)$ le polynôme caractéristique de A.

Le but de cette partie est de montrer que A annule son polynôme caractéristique, c'est-à-dire que :

$$A^n - a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I_n = \mathcal{O}_n$$

III.A – Justifier l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et d'une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telles que $A = PTP^{-1}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de T.

On note $E_1, \ldots, E_n$ les matrices colonnes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Ainsi $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de T est : $\chi_T(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$.

III.B – Montrer que T et A ont le même polynôme caractéristique.

III.C – Vérifier que, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, on a :

$$(T - \lambda_i I_n)(T - \lambda_j I_n) = (T - \lambda_j I_n)(T - \lambda_i I_n)$$

III.D – Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$(T - \lambda_{k+1} I_n)E_{k+1} \in Vect\{E_1, \ldots, E_k\}$$

III.E – On pose, pour tout entier k compris entre 1 et n : $M_k = (T - \lambda_1 I_n)(T - \lambda_2 I_n)\ldots(T - \lambda_k I_n)$, que l'on peut noter $M_k = \prod_{j=1}^{k}(T - \lambda_j I_n)$ puisque les matrices du produit commutent deux à deux.

Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et n, on a : $M_k E_k = 0$.

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur k.

III.F – En déduire que $\prod_{j=1}^{n}(T - \lambda_j I_n) = \mathcal{O}_n$ puis que $\prod_{j=1}^{n}(A - \lambda_j I_n) = \mathcal{O}_n$.

On observe que le résultat attendu en découle puisque $\chi_T = \chi_A$.

IV Méthodes numériques de calcul du polynôme caractéristique et des valeurs propres d'une matrice réelle

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - a_0)$.

IV.A – Le calcul du polynôme caractéristique

Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne.

On pose $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$.

IV.A.1) Montrer que $A^n X_0 = a_{n-1}A^{n-1}X_0 + a_{n-2}A^{n-2}X_0 + \ldots + a_0 X_0$.

IV.A.2) En déduire que X est solution d'un système linéaire de la forme : $\tilde{A}X = B$ où $\tilde{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera les colonnes et B est une matrice colonne que l'on précisera.

IV.A.3) Que peut-on dire de ce système linéaire si la famille $(A^{n-1}X_0, A^{n-2}X_0, \ldots, X_0)$ est libre ?

BY-NC-SA

IV.B – Le calcul approché des valeurs propres

Dans cette partie, on suppose que A admet n valeurs propres réelles distinctes telles que :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$$

On considère l'ensemble F des suites réelles $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} & \text{arbitraires} \\ y_{k+n} = a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \ldots + a_0 y_k & \text{pour tout entier } k \geqslant 0 \end{cases}$$

IV.B.1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

IV.B.2) Montrer que, pour tout entier j compris entre 1 et n, la suite $(\lambda_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à F.

Dans la suite, on admet que F est de dimension finie avec $\dim F = n$.

On admet aussi que la famille $((\lambda_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_n^k)_{k\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de l'espace vectoriel des suites de réels.

Soit une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F.

IV.B.3) Justifier l'existence d'une famille de n réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ telle que, pour tout entier k :

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k$$

IV.B.4) On choisit $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ pour que α_1 soit non nul.

a) Donner un équivalent simple de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quand k tend vers $+\infty$.

b) En déduire que y_k est non nul à partir d'un certain rang.

c) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{y_{k+1}}{y_k} = \lambda_1$.

IV.B.5) Une fois obtenue λ_1, comment peut-on construire une suite qui converge vers λ_2 ? On ne demande pas de justification.

IV.C – Illustration sur un exemple

Dans cette partie, on choisit :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

IV.C.1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer les deux valeurs propres λ_1, λ_2 avec $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

IV.C.2) Préciser la relation de récurrence vérifiée par les suites de l'espace F associé à la matrice A.

IV.C.3) En prenant $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, écrire des instructions en Maple ou Mathematica permettant de calculer les 10 premiers termes de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

IV.C.4) Calculer ces 10 premiers termes et déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}$ soit une valeur approchée de λ_1 à 10^{-1} près.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres réels et suites numériques
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi