Concours Centrale-Supélec, France

Session 2019, filière TSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : matrices compagnons
- Partie II : matrices symétriques positives
- Partie III : produits de Kronecker
- Partie IV : états quantiques de Werner

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2019/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures Calculatrices autorisées

2019

Notations

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note :

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels ;

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

— I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales ;

— $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques ;

— $A^\top$ la transposée de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels ;

— χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

— $\mathrm{E}_{i,j}^{(n,p)}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui a tous ses coefficients nuls sauf le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1. Lorsque $n = p$, on simplifie l'écriture en notant $\mathrm{E}_{i,j}^{(n)}$ la matrice $\mathrm{E}_{i,j}^{(n,n)}$.

On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne.

On admet que $\left(\mathrm{E}_{i,j}^{(n,p)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Mis à part les questions 31 et 38, les parties I, II et III sont indépendantes. Dans la partie III, les questions 34, 35, 36 et 37 sont indépendantes de ce qui précède. La partie IV dépend fortement des parties II et III.

I Matrices compagnons

Si $(a_1, ..., a_p)$ est un p-uplet de nombres réels, on note $C(a_1, ..., a_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix}$.

I.A – Étude d'un premier exemple

Dans cette question on suppose $p = 3$ et $A = C(-2, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q 1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Q 2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}$$

I.B – Étude d'un second exemple

Dans cette question on suppose $p = 3$, $B = C(1, -3, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 3. Déterminer le polynôme caractéristique de B et une base de chacun des sous-espaces propres de B.

Q 4. Montrer que B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais qu'elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère le vecteur colonne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

Q 5. Déterminer un vecteur colonne $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Bv_2 = v_1 + v_2$.

Q 6. Déterminer un vecteur colonne $v_3 = \begin{pmatrix} z \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Bv_3 = v_2 + v_3$.

Q 7. En déduire une matrice R inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = RTR^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I.C – On revient au cas général, où $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 8. Montrer par récurrence sur p que le polynôme caractéristique de C est

$$\chi_C(X) = X^p - a_pX^{p-1} - \cdots - a_2X - a_1$$

Q 9. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors le rang de $C - \lambda \mathrm{I}_p$ est supérieur ou égal à $p - 1$; en déduire que les sous-espaces propres de C sont de dimension 1.

Q 10. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de C est scindé à racines simples.

I.D –

Q 11. On considère un polynôme unitaire P de $\mathbb{R}[X]$ de degré p. Montrer qu'il existe un unique $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $P = \chi_C$ où $C = C(a_1, ..., a_p)$.

Q 12. Étant donné un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur Q pour que ce polynôme soit le polynôme caractéristique d'une matrice.

II Matrices symétriques positives

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul. On rappelle que la norme euclidienne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est définie par $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en particulier $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top X \geqslant 0$.
Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice réelle symétrique. On dit que A est positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$.

II.A –

Q 13. Montrer que si $(\lambda, \mu) \in {\mathbb{R}^+}^2$ et si A et B sont des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\lambda A + \mu B$ est une matrice symétrique positive.

Q 14. Montrer que si A est une matrice symétrique positive, alors $A^\top$ l'est aussi.

II.B – On considère une matrice symétrique positive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 15. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) P^\top$$

Q 16. On considère $i \in \{1, ..., n\}$ et un vecteur propre $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de A associé à λ_i. Montrer que

$$\lambda_i \|X_i\|^2 = X_i^\top AX_i$$

Q 17. En déduire que les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A sont toutes positives.

Q 18. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $a + c \geqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$.

II.C – Réciproquement, on considère une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives. Il existe alors une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) P^\top$$

Q 19. On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = P^\top X$. On note $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, montrer que

$$X^\top AX = {X'}^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) X' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x'_i}^2$$

Q 20. En déduire que A est une matrice symétrique positive.

BY-NC-SA

Q 21. Montrer que si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors A est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

II.D – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$. Montrer que A est symétrique positive.

Q 23. Réciproquement, on suppose que A est une matrice symétrique positive. En utilisant la sous-partie II.B, montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.

III Produits de Kronecker

Soient n, n', p, p', des entiers $\geqslant 1$. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n'} \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$, on définit le produit de Kronecker (ou produit tensoriel) de A et B noté $A \otimes B$ par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n'}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np,n'p'}(\mathbb{R})$$

Par exemple dans le cas $n = n' = p = p' = 2$ on a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,1}\beta & a_{1,2}\alpha & a_{1,2}\beta \\ a_{1,1}\gamma & a_{1,1}\delta & a_{1,2}\gamma & a_{1,2}\delta \\ a_{2,1}\alpha & a_{2,1}\beta & a_{2,2}\alpha & a_{2,2}\beta \\ a_{2,1}\gamma & a_{2,1}\delta & a_{2,2}\gamma & a_{2,2}\delta \end{pmatrix}$$

III.A – On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Q 24. Calculer $A \otimes B$ et $X \otimes Y$.

Q 25. Justifier sans calcul que la matrice $A \otimes B$ est diagonalisable.

Q 26. Vérifier que X est un vecteur propre de A, que Y est un vecteur propre de B et que $X \otimes Y$ est un vecteur propre de $A \otimes B$.

III.B – Dans cette sous-partie uniquement, on énonce des propriétés vraies pour tous $n, n', p, p' \in \mathbb{N}^*$, et *on demande de faire les preuves seulement dans le cas où* $n = n' = p = p' = 2$.

Q 27. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ montrer que

$$(\alpha A + A') \otimes B = \alpha A \otimes B + A' \otimes B \tag{III.1}$$

Dans la suite du problème, on admettra que si de plus $B' \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ alors

$$A \otimes (\alpha B + B') = \alpha A \otimes B + A \otimes B' \tag{III.2}$$

Q 28. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ montrer que $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sont symétriques alors $A \otimes B$ est symétrique.

Q 29. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ démontrer que $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Dans la suite du problème, on admettra que si $A \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{n',n''}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,p'}(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathcal{M}_{p',p''}(\mathbb{R})$ alors

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB') \tag{III.3}$$

III.C – On revient au cas général où n est un entier naturel non nul et on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associée à λ, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, μ une valeur propre de B et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B associée à μ.

Q 30. Montrer que $X \otimes Y$ est un vecteur propre de $A \otimes B$ et que $\lambda\mu$ est une valeur propre de $A \otimes B$.

Q 31. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques positives montrer que $A \otimes B$ est une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$. On pourra utiliser les résultats des questions 22 et 23 ainsi que l'égalité (III.3).

III.D – On considère la base $(\mathrm{E}_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra aussi utiliser la base $(\mathrm{E}_{i,j}^{(n^2)})_{1\leqslant i,j\leqslant n^2}$ de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

Q 32. On suppose dans cette question que $n = 2$. Calculer $\mathrm{E}_{1,2}^{(2)} \otimes \mathrm{E}_{2,1}^{(2)}$ et plus généralement les 16 produits tensoriels $\mathrm{E}_{i,j}^{(2)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(2)}$.

Q 33. Si $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$ exprimer $\mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(n)}$ en fonctions d'éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

BY-NC-SA

On admet dans la suite du problème que la famille des n^4 produits tensoriels $(\mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(n)})$ pour $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$ est une base de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

On note τ_2 l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$ $\tau_2(\mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes \mathrm{E}_{k,l}^{(n)}) = \mathrm{E}_{i,j}^{(n)} \otimes (\mathrm{E}_{k,l}^{(n)})^\top$.

Q 34. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\tau_2(A \otimes B) = A \otimes B^\top$.

III.E – Application aux entiers algébriques

On dit qu'un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire P à coefficients dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire tel que $P(\alpha) = 0$.

Q 35. Démontrer que tout élément $\alpha \in \mathbb{Z}$ est un entier algébrique.

Q 36. Montrer que i et $\sqrt{2}$ sont des entiers algébriques.

Q 37. Prouver que le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un entier algébrique.

On *admet* que le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est lui-même à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Q 38. En utilisant la sous-partie I.D et la question 30, montrer que le produit $\alpha\beta$ de deux entiers algébriques α et β est un entier algébrique.

IV États quantiques de Werner

Dans cette partie, on étudie certains états quantiques introduits par le physicien Reinhard Werner en 1989. Chaque état de Werner représente l'état quantique d'un système à deux particules. Actuellement, ces thèmes sont au cœur de la physique contemporaine et font l'objet d'intenses recherches.

Soit $N \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un état quantique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $\mathrm{tr}(A) = 1$ et si A est une matrice symétrique positive. On note $\mathcal{Q}_N$ l'ensemble des états quantiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices symétriques positives de trace 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Q 39. Si $(A,B) \in (\mathcal{Q}_N)^2$ montrer que $\forall t \in [0,1]$, $tA+(1-t)B \in \mathcal{Q}_N$. On dit que $\mathcal{Q}_N$ est un ensemble convexe.

Q 40. On suppose que m est un entier naturel non nul. Montrer que si, $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $A_i \in \mathcal{Q}_n$, $B_i \in \mathcal{Q}_n$, $p_i \in \mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i A_i \otimes B_i \in \mathcal{Q}_{n^2}$.

Un état quantique $C \in \mathcal{Q}_{n^2}$ est dit séparable si on peut l'écrire sous la forme

$$C = \sum_{i=1}^{m} p_i A_i \otimes B_i$$

pour un certain entier naturel m, des états quantiques A_i et B_i de $\mathcal{Q}_n$ et des réels $p_i \geqslant 0$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Q 41. Montrer que si un état C de $\mathcal{Q}_{n^2}$ est séparable alors la matrice $\tau_2(C)$ est symétrique positive (l'application τ_2 a été définie dans la sous-partie III.D).

On définit la matrice ligne Ψ de $\mathcal{M}_{1,n^2}(\mathbb{R})$ par

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{1,i}^{(1,n)} \otimes \mathrm{E}_{1,i}^{(1,n)}$$

Q 42. Calculer le produit $\Psi^\top \Psi$.

Q 43. Montrer que $\Psi^\top \Psi$ est un état quantique de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$.

On suppose dans la suite que $n = 2$.

Q 44. Préciser la matrice $\Psi^\top \Psi$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Soit $0 \leqslant p \leqslant 1$. On définit la matrice $W_p = p\Psi^\top \Psi + (1-p)\dfrac{1}{4}\mathrm{I}_4$.

Q 45. Montrer que W_p est un état quantique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On l'appelle état quantique de Werner.

Q 46. Expliciter la matrice W_p.

Q 47. Expliciter la matrice $\tau_2(W_p)$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et calculer ses valeurs propres.

Q 48. En utilisant la question 41, démontrer qu'il existe un intervalle I inclus dans $[0,1]$ tel que $\forall p \in I$, W_p n'est pas séparable.

Ce résultat traduit que, pour les valeurs de p dans cet intervalle, l'état quantique des deux particules est global, on ne peut pas le décrire en séparant les particules l'une de l'autre.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi