Concours Centrale-Supélec, France

Session 2020, filière TSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème I : décompositions de matrices
- Problème II : calcul approché d'intégrales par quadrature

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2020/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI

4 heures

Calculatrice autorisée

2020

Ce sujet se compose de deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

I Décompositions de matrices

Notations et rappels

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ son produit scalaire.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $M^\top M = MM^\top = I_n$.

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure lorsque $a_{i,j} = 0$ dès que $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

On pourra utiliser sans preuve les deux résultats suivants :

— le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure ;

— l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

Objectifs

Ce problème étudie deux types de décompositions matricielles, d'abord pour une matrice inversible, puis pour une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

I.A – Un exemple introductif

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On note c_1, c_2 et c_3 les colonnes de P considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Q 1. Justifier que la matrice P est inversible. En déduire que la famille $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$ pour construire une base orthonormée $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Q 3. Soit Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$. Justifier que $Q^{-1} = Q^\top$.

Q 4. Déterminer la matrice de passage R de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}_1$.

On constate que R est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Q 5. Justifier que $P = QR$.

I.B – Cas général : décomposition QR

Q 6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. En s'inspirant de la démarche mise en place sur l'exemple, montrer qu'il existe une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $P = QR$.

Q 7. Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliquer l'intérêt de la décomposition $P = QR$, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, pour résoudre le système linéaire $Px = b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$.

Les deux questions qui suivent permettent de démontrer l'unicité de la décomposition précédente.

Q 8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. En raisonnant de proche en proche de la première à la dernière colonne de M, montrer que $M = I_n$.

Q 9. On considère quatre matrices Q_1, Q_2, R_1, R_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que Q_1 et Q_2 sont orthogonales, R_1 et R_2 sont triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs et $Q_1R_1 = Q_2R_2$. Montrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

I.C – Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

Q 10. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant la décomposition QR d'une matrice inversible bien choisie, démontrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $A = QTQ^\top$.

BY-NC-SA

Q 11. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une décomposition $A = QTQ^\top$ avec $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, mais non diagonale.

Q 12. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une décomposition $A = QTQ^\top$ avec $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale à éléments diagonaux strictement positifs.

II Calcul approché d'intégrales par quadrature

Notations et rappels

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel.

Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$, le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ est défini par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée, définie sur le segment $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction g continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $N(g) = \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^k$, on note $g^{(k)}$ sa dérivée k-ième.

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à une méthode numérique de calcul approché de

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour une fonction f continue sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le principe de cette méthode, dite par quadrature, consiste à approcher $I(f)$ par une somme, pondérée par des poids $(\omega_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, de valeurs prises par la fonction f en $n + 1$ points distincts $(r_0, r_1, ..., r_n)$ de l'intervalle $[-1, 1]$.

On note r le $(n + 1)$-uplet $(r_0, r_1, ..., r_n)$ et $\Sigma_r(f)$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega_k f(r_k)$.

Les réels $(r_0, ..., r_n) \in [-1, 1]^{n+1}$ sont appelés *nœuds* de la quadrature. La performance de cette méthode d'approximation dépend du nombre de nœuds, du choix de ces nœuds et de la régularité de la fonction f. Ces trois aspects sont abordés dans ce problème.

II.A – Méthode de quadrature

Dans cette sous-partie, $(r_0, r_1, ..., r_n)$ sont $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.

II.A.1) Détermination des poids (ω_i)

Pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, on note $A_i(X) = \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{X - r_k}{r_i - r_k}$.

Q 13. Vérifier que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $A_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

Q 14. Démontrer que $(A_0, A_1, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner la décomposition, dans cette base, d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$.

On se propose de démontrer qu'il existe un unique $(n + 1)$-uplet $(\omega_0, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour lequel l'égalité

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \omega_k P(r_k)$$

est valable pour toute fonction P polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

On raisonne par analyse-synthèse.

a) Analyse

On suppose l'existence d'un tel $(n + 1)$-uplet $(\omega_0, ..., \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Q 15. Pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, exprimer ω_i en fonction de A_i.

Q 16. En déduire l'unicité de $(\omega_0, ..., \omega_n)$.

b) Synthèse

Q 17. Démontrer que, pour les valeurs $\omega_0, ..., \omega_n$, déterminées à la question 15, l'égalité

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \omega_k P(r_k)$$

est valable pour toute fonction P polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

BY-NC-SA

Dans toute la suite, pour un jeu de nœuds $r = (r_0, ..., r_n)$ donné, on note Q_r le polynôme

$$Q_r = \prod_{k=0}^{n} (X - r_k).$$

Si $(\omega_0, ..., \omega_n)$ sont les valeurs déterminées à la question 15, on rappelle que

$$\Sigma_r(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(r_k).$$

Q 18. On choisit $n = 0$ et $r_0 = 0$. Donner l'interprétation géométrique, en termes d'aire, de $\Sigma_r(f)$ lorsque f est positive sur $[-1, 1]$.

Q 19. On choisit $n = 1$, $r_0 = -1$ et $r_1 = 1$. Donner l'interprétation géométrique, en termes d'aire, de $\Sigma_r(f)$ lorsque f est positive sur $[-1, 1]$.

II.A.2) Majoration de l'erreur

On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ et on se propose de majorer l'erreur d'approximation $|I(f) - \Sigma_r(f)|$.

Q 20. Justifier l'existence de $N(f^{(n+1)})$ et de $N(Q_r)$.

Q 21. Démontrer que $T_{r,f} = \sum_{k=0}^{n} f(r_k) A_k$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $T_{r,f}(r_i) = f(r_i)$, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$.

On se propose de démontrer que, pour tout réel $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - T_{r,f}(x)| \leqslant \frac{N(f^{(n+1)}) N(Q_r)}{(n+1)!}. \tag{II.1}$$

On suppose que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-1, 1]$ s'annulant en au moins $n + 2$ points distincts de $[-1, 1]$.

Q 22. Démontrer que g' s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $]-1, 1[$.

Q 23. Démontrer que $g^{(n+1)}$ s'annule en au moins un point de l'intervalle $]-1, 1[$.

Q 24. Démontrer que l'inégalité (II.1) est vérifiée si $x \in \{r_0, ..., r_n\}$.

Q 25. On suppose que $x \notin \{r_0, ..., r_n\}$. Montrer qu'il existe un réel λ_x pour lequel la fonction g_x définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall t \in [-1, 1], \qquad g_x(t) = f(t) - T_{r,f}(t) - \lambda_x Q_r(t)$$

vérifie $g_x(x) = 0$.

Q 26. En utilisant le résultat de la question 23, démontrer qu'il existe un réel $c_x \in]-1, 1[$ tel que

$$\lambda_x = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

et conclure.

Q 27. En déduire que $|I(f) - \Sigma_r(f)| \leqslant 2 \dfrac{N(f^{(n+1)}) N(Q_r)}{(n+1)!}$.

II.B – Choix d'un jeu de nœuds

II.B.1) Nœuds équidistants

On choisit un jeu $s = (s_0, ..., s_n)$ de $n+1$ nœuds équidistants dans l'intervalle $[-1, 1]$ vérifiant $s_0 = -1$ et $s_n = 1$. On cherche à minorer $N(Q_s)$.

Q 28. On pose $h = 2/n$ et $x = -1 + th$ avec $t \in [0, n]$. Exprimer $|Q_s(x)|$ en fonction de $\varphi_{n+1}(t) = \prod_{k=0}^{n} |t - k|$.

Q 29. Justifier que la fonction φ_{n+1} admet un maximum sur $[0, n]$ et que ce maximum est atteint sur $[0, n/2]$.

On admet dans la suite que ce maximum est atteint sur $[0, 1]$.

Q 30. Démontrer que $\max_{[0,1]} \varphi_3 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Q 31. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}(n-1)!$.

Q 32. En déduire une minoration de $N(Q_s)$.

BY-NC-SA

II.B.2) Zéros des polynômes de Tchebychev

On cherche un nouveau jeu de nœuds $c = (c_0, ..., c_n)$ utilisant une famille de polynômes.

On rappelle que arccos est la fonction réciproque de la fonction $\left|\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) \end{array}\right.$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n : x \mapsto \cos(n \arccos(x))$.

Q 33. Préciser le domaine de définition de T_n.

Q 34. Calculer, pour tout x dans le domaine de définition, $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$.

Q 35. Pour tout entier naturel n, calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.

Q 36. Étudier la parité de T_n en fonction de n.

Q 37. Pour tout x dans le domaine de définition, démontrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

Q 38. En déduire que T_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

Pour tout entier naturel n, T_n est le n-ième polynôme de Tchebychev.

Q 39. Montrer que T_{n+1} admet $n+1$ racines distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

On rappelle qu'après l'exécution de l'instruction Python `import numpy as np`, `np.pi` désigne la constante π et `np.cos` correspond à la fonction cosinus. La fonction `np.cos` peut s'appliquer à un tableau, elle produit alors un nouveau tableau de même dimension dont les composantes sont les cosinus des composantes du tableau passé en paramètre. Par ailleurs, l'expression `np.linspace(x, y, n)` construit un vecteur de `n` valeurs, régulièrement espacées, la première valant `x` et la dernière `y`.

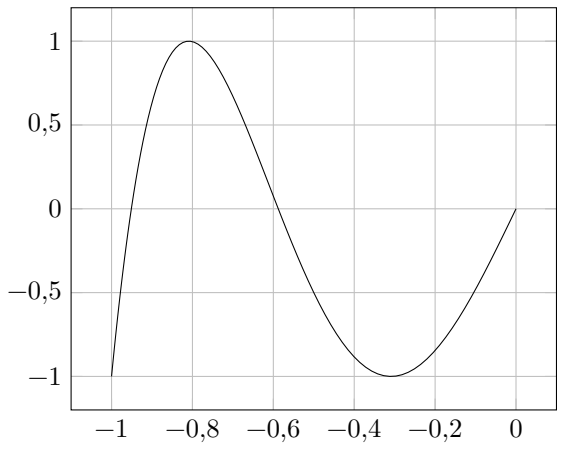
Q 40. Compléter la fonction Python `Tchebychev(n)` ci-dessous qui prend en argument un entier n et renvoie un couple de deux vecteurs $(u_0, ..., u_{999})$ et $(y_0, ..., y_{999})$, avec, pour tout $k \in [\![0, 999]\!]$, $y_k = T_n(u_k)$.

```
import numpy as np

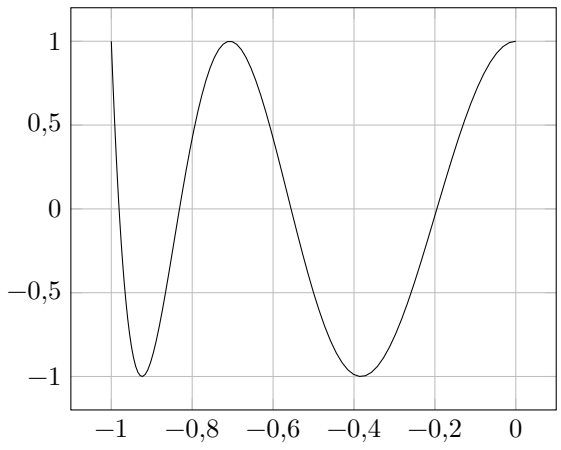
def Tchebychev(n):
    T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)
    U = np.cos(T)
    Y = . . .
    return U, Y
```

En reliant les points de coordonnées (u_k, y_k) pour deux valeurs du paramètre n, on a obtenu les deux courbes suivantes.

Courbe 1



Courbe 2



Q 41. Pour chacune de ces deux courbes, préciser, en la justifiant, la valeur utilisée pour le paramètre n.

Q 42. On choisit les racines obtenues en question 39 comme nœuds du jeu $c = (c_0, ..., c_n)$. Donner la valeur de $N(Q_c)$.

II.B.3) Comparaison des ces deux jeux de nœuds

Q 43. En admettant que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n}\, n^n$, calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du rapport $\dfrac{N(Q_c)}{N(Q_s)}$.

Q 44. À l'aide de ce résultat et de celui de la question 27, comparer la qualité des estimations de l'intégrale sur $[-1, 1]$ par quadrature, selon le choix de s ou c comme jeu de nœuds.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Dérivabilité et convexité
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi