Concours Centrale-Supélec, France

Session 2026, filière TSI

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : problèmes de minimisation et de convergence
- Partie B : limites de suites de matrices
- Partie C : interpolation polynomiale et moindres carrés
- Partie D : régression linéaire et moindres carrés
- Partie E : la méthode du gradient

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2026/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

4 heures Calculatrice autorisée

2026

La méthode des moindres carrés

Ce problème comporte 5 parties. Les parties A, B, C et D sont indépendantes entre elles.
L'objet de ce sujet est l'étude d'une méthode très utile en intelligence artificielle : la méthode des moindres carrés. Les parties A et C présentent des domaines des mathématiques que l'on peut reformuler en termes de problème des moindres carrés. La partie D amène à résoudre des systèmes d'équations linéaires au sens des moindres carrés à l'aide de la notion de décomposition en valeurs singulières. La partie B introduit la notion de limites de suites de matrices, que l'on utilise dans la partie E pour résoudre le problème étudié dans la partie D.

Rappels et notations

- Si k et l sont deux entiers tels que $k \leq l$, on note $[\![k, l]\!]$ l'ensemble des entiers i tels que $k \leq i \leq l$.
- L'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
  On note aussi $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n.
- La transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée A^T.
  Elle est définie par $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.
- La trace d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$. Elle est définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- Le produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n lignes est noté $\langle ., . \rangle$ et sa norme associée est notée $\|.\|_2$. Ce produit scalaire est défini par :

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \forall B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \langle A, B \rangle = A^T B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

- Le produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées est aussi noté $\langle ., . \rangle$ et sa norme associée est notée $\|.\|_2$. Ce produit scalaire est défini par :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \forall B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}.$$

- L'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'appelle le spectre de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.

Partie A – Quelques problèmes de minimisation et de convergence

I – Distance entre un vecteur et un sous-espace vectoriel

On munit $M_{4,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ avec

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base orthogonale de F. Proposer une base orthonormée de F.

Q2. Calculer le projeté orthogonal sur F d'un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$.

Q3. On note $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\min\limits_{u \in F} \|v - u\|_2$.

II – Séries de Fourier

Soit $E = \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques. On munit E du produit scalaire défini par

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \varphi(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On note $\|.\|$ la norme associée. Les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont définis (pour $n \geq 1$) par

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous introduisons les fonctions $e_n : x \longmapsto \cos(nx)$ et $f_n : x \longmapsto \sin(nx)$.
Les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in E$ sont les fonctions définies par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad S_N(f) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} (a_n(f)e_n + b_n(f)f_n).$$

Q4. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $b_n(f) = 0$ et $a_0(f) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$ et $a_n(f) = \dfrac{(-1)^n}{\pi} \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}$.

Q5. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$ convergent, et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$.

Q6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - (n\pi)^2}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$ qui est solution de l'équation différentielle

$$f'' + e^{ix} f = 0. \qquad (\mathcal{E})$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\ \mathrm{d}t$ et $c_n(f'') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\ \mathrm{d}t$.

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Q8. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$, puis que $c_{n-1}(f) = n^2 c_n(f)$.
En déduire que $c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{c_0(f)}{(n!)^2} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$.

Q9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = c_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right) = c_0(f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(n!)^2}$.

On admet que la fonction définie par $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(n!)^2}$ est bien une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

Q10. On rappelle que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Quelle est sa dimension ? Justifier. L'équation $(\mathcal{E})$ admet-elle une solution qui n'est pas 2π-périodique ?

Q11. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_0, \dots e_N, f_1, \dots, f_N)$ est orthogonale pour φ. Est-elle orthonormale ?

Q12. Soient $g \in E$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On note $V_N = \text{Vect}(e_0, \dots, e_N, f_1, \dots, f_N)$.
Quelle est la projection orthogonale de g sur V_N ? En déduire une fonction $h \in E$ telle que $\|g-h\| = \min_{v\in V_N} \|g-v\|$.

Partie B – Limites de suites de Matrices

Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, avec $M_k = \begin{pmatrix} m_{k,1,1} & \dots & m_{k,1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,n,1} & \dots & m_{k,n,p} \end{pmatrix}$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$).

On dit que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ la suite $(m_{k,i,j})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. On note alors

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,1,1}) & \dots & \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,1,p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,n,1}) & \dots & \lim\limits_{k\to+\infty}(m_{k,n,p}) \end{pmatrix}.$$

Lorsque la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.
On admettra sans preuve que, si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors, pour tout $(q,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, toute matrice $P \in M_{q,n}(\mathbb{R})$ et toute matrice $Q \in M_{p,r}(\mathbb{R})$ la suite $(PM_kQ)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{k\to+\infty}(PM_kQ) = P\left(\lim\limits_{k\to+\infty} M_k\right)Q$.

Q13. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Montrer que les suites $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(B^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent.

Q14. Soit A une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset]-1,1]$.

Q15. Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et que la suite de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Q16. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
La suite de matrices $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Dans la suite de l'énoncé, on pourra utiliser sans preuve le résultat suivant :
si $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice et si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = M \qquad \text{si et seulement si} \qquad \lim_{k\to+\infty} \|M_k - M\|_2 = 0.$$

Partie C – Interpolation polynômiale et moindres carrés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de nombres réels deux à deux distincts. Pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, on note

$$L_i(X) = \prod_{0\le j\le n,\ j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q17. Montrer que pour tout $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$, on a $L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q18. Montrer que l'on peut munir $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ en posant $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.

Q19. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Q20. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $\langle L_i, P \rangle = P(x_i)$, puis que $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on ait $a < x_i < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. On note $P_f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$.

Q21. Soient $m \leq n$. En calculant $\langle P_f - Q, P_f - Q \rangle$, montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - R(x_i))^2 = \min_{Q \in \mathbb{R}_m[X]} \left(\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - Q(x_i))^2 \right).$$

Q22. Soit $g \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que g possède au moins $n+2$ zéros deux à deux distincts dans $[a, b]$. Montrer par récurrence sur n que $g^{(n+1)}$ a au moins un zéro dans $[a, b]$. On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q23. Soit $x \in [a, b]$ avec $x \neq x_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Soit $K = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}$.

Montrer que $W : t \longmapsto f(t) - P_f(t) - K \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$ s'annule en $n + 2$ points distincts de $[a, b]$.

En déduire l'existence de $\xi_x \in [a, b]$ tel que $f(x) - P_f(x) = \dfrac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$.

Partie D – Régression linéaire et moindres carrés

I – Le cas particulier de la dimension 2

Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons n points du plan réel $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ avec $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts tels que $(x_1, \dots, x_n)$ ne soit pas colinéaire au vecteur $(1, \dots, 1)$.

En dimension 2, la régression linéaire consiste à trouver une relation affine entre deux grandeurs physiques, c'est-à-dire à chercher une droite affine s'approchant le plus possible des points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ (au sens des moindres carrés).

Pour formuler ce problème de manière précise et rigoureuse, nous notons

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2 \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Le problème est alors de trouver les valeurs de a et b qui minimisent la fonction E.

Q24. Montrer que E admet un minimum m sur $\mathbb{R}^2$ (qu'on ne demande pas de calculer) et que $m = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y \right\|_2^2$.

Q25. Montrer que $\det(A^T A) = n \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2$, puis justifier l'affirmation $\det(A^T A) > 0$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Q26. Calculer le gradient de $E : (a, b) \longmapsto E(a, b)$.

Soit (a_0, b_0) un point critique de E. Montrer que l'on a $A^T A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = A^T Y$.

En déduire qu'il existe un unique couple $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E(c, d) = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} E(a, b)$.

II – Les moindres carrés : le cas général

Nous allons maintenant généraliser les idées de la sous-section précédente au cas de la dimension quelconque.
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ avec $C_1, \dots C_p$ les colonnes de A. Soit $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q27. Soit $x \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^T Ax = 0$. Montrer que $\|Ax\|_2 = 0$.

Q28. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(A^T A\right) = \mathrm{Ker}\,(A)$, puis que $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(A)$.

Q29. Montrer l'existence d'un unique couple $(u, d) \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \times (\mathrm{Col}(A))^\perp$ tel que $y = Au + d$.

Q30. Montrer que pour tout $x \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $\|Ax - y\|_2 \geq \|d\|_2$ avec égalité si et seulement si $x - u \in \mathrm{Ker}(A)$.

Q31. Montrer que $A^T y = A^T Au$.

Q32. Soit $x_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\|Ax_0 - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2 \iff A^T Ax_0 = A^T y$.

Q33. Supposons $n > p$ et que la matrice A est de rang maximal, c'est-à-dire que le rang de A est égal à p.
Montrer que $A^T A$ est inversible.
En déduire que l'équation $\|Ab - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2$ a une unique solution donnée par $b = (A^T A)^{-1} A^T y$.

III – La décomposition en valeurs singulières

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ non nulle et $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous allons généraliser le résultat de la question **Q33**.
Dans la suite, nous notons $\mathrm{Diag}_{k,l}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\min(k,l)})$ la matrice de taille $k \times l$ dont le coefficient en ligne i et colonne i est α_i (pour tout indice $i \leq \min(k, l)$), et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Q34. Montrer que pour tout vecteur colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, les nombres $X^T A^T AX$ et $X^T X$ sont positifs ou nuls.

Q35. Montrer que les valeurs propres de la matrice $A^T A$ sont toutes positives ou nulles.

Q36. Notons $r = \mathrm{rg}\left(A^T A\right) = \mathrm{rg}\,(A)$ (égalité prouvée à la question **Q28**).
Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ et une matrice orthogonale $V \in O_p(\mathbb{R})$ tels que $A^T A = V \mathrm{Diag}_{p,p}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots 0) V^T$.

Q37. Notons v_i la i-ème colonne de V.
Montrer que la famille $(Av_1, \dots, Av_r)$ est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, et que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\|Av_i\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} & \text{si } i \leq r \\ 0 & \text{si } i \geq r+1 \end{cases}$.
Montrer l'existence d'une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $u_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Av_i$ pour tout $i \leq r$.

Q38. Notons U la matrice dont la i-ème colonne est u_i et $D = \mathrm{Diag}_{n,p}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0 : \dots, 0\right) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Vérifier que $U \in O_n(\mathbb{R})$ et que $AV = UD$.

En particulier, on a $A = UDV^T$. Cette écriture s'appelle une décomposition en valeur singulière de A. Posons

$$\Delta = \mathrm{Diag}_{p,n}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, 0, \dots, 0\right) \in M_{p,n}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{A} = V \Delta U^T \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Q39. Montrer que $A\widetilde{A}$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.

Q40. Soit $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $b = \widetilde{A} y \in M_{p,1}(\mathbb{R})$. Vérifier que $\|Ab - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2$.

Soit $x_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ un autre vecteur qui vérifie $\|Ax_0 - y\|_2 = \min\limits_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|Ax - y\|_2$. Nous allons montrer que $\|x_0\|_2 \geq \|b\|_2$.

Q41. Montrer que $Ab - y \in \mathrm{Im}(A)^\perp$. En déduire que $x_0 - b \in \mathrm{Ker}(A)$

Q42. Montrer que $b \in \mathrm{Ker}(A)^\perp$.
Indication : on pourra exprimer $\mathrm{Im}\left(\widetilde{A}\right)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ en fonction des vecteurs colonnes v_i.

Q43. Montrer que $\|x_0\|_2 \geq \|b\|_2$ avec égalité si et seulement si $x_0 = b$.

Partie E – La méthode du gradient

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Nous avons vu à la question **Q35** que les valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_p$ de A^TA sont des nombres réels positifs ou nuls. Dans cette partie, nous supposons en plus que pour tout i, on a $\lambda_i > 0$.

Nous reformulons notre problème des moindres carrés en remarquant (par le calcul) que

$$\forall x \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \qquad \|Ax - y\|_2^2 = \langle A^TAx, x\rangle - 2\langle x, A^Ty\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Nous allons étudier une suite de matrices convergente dont la limite sera un minimum de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle A^TAx, x\rangle - 2\langle x, A^Ty\rangle \end{array} \right. .$$

Soit $(e_1, , \ldots, e_p)$ une base orthonormale de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on ait $A^TAe_i = \lambda_i e_i$.

Q44. Montrer que la matrice A^TA est inversible, et justifier que $\mathrm{Ker}(A) = \{\ 0\ \}$.

Q45. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} M_{p,1}(\mathbb{R}) \times M_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \left\langle A^TAx, y\right\rangle \end{array} \right.$ est un produit scalaire.

Soient $(v_1, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ et $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} v_i e_i$.

Q46. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2$.

Montrer que $\left\langle A^TAv, v\right\rangle \left\langle (A^TA)^{-1}v, v\right\rangle \leq \dfrac{1}{4}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_p}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} + \frac{\lambda_p}{\lambda_i}\right)v_i^2\right)^2$.

Q47. Soit $\psi : t \longmapsto \dfrac{t}{\lambda_1} + \dfrac{\lambda_p}{t}$. Calculer le maximum de ψ sur $[\lambda_1, \lambda_p]$.

Q48. On note $c(A) = \dfrac{\lambda_p}{\lambda_1}$. Montrer l'inégalité de Kantorovich : $\left\langle A^TAv, v\right\rangle \left\langle (A^TA)^{-1}v, v\right\rangle \leq \dfrac{(c(A)+1)^2}{4c(A)}\|v\|_2^4$.

Nous souhaitons maintenant déterminer une approximation de l'unique solution ℓ à l'équation $A^TA\ell = A^Ty$.
Nous définissons une suite par récurrence en choisissant un vecteur $x_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d_k = A^TAx_k - A^Ty \qquad t_k = \frac{\|d_k\|_2^2}{\langle A^TAd_k, d_k\rangle} \qquad x_{k+1} = x_k - t_k d_k.$$

Pour que cette définition ait un sens, nous supposons que le vecteur d_k est non nul pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette hypothèse n'est pas restrictive : s'il existe k tel que $d_k = 0$ alors $x_k = \ell$ et nous avons ainsi la valeur exacte de ℓ.
Soit $\ell = (A^TA)^{-1}A^Ty \in M_{p,1}(\mathbb{R})$.

Q49. Vérifier que pour tout $x \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, on a $f(x) - f(\ell) = \langle A^TA(x - \ell), x - \ell\rangle$.

Q50. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{k+1}) - f(\ell) = (f(x_k) - f(\ell))\left(1 - \dfrac{\|d_k\|_2^4}{\langle A^TAd_k, d_k\rangle\left\langle (A^TA)^{-1}d_k, d_k\right\rangle}\right)$.

Q51. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_1\|x_k - \ell\|_2^2 \leq f(x_k) - f(\ell) \leq (f(x_0) - f(\ell))\left(\dfrac{c(A)-1}{c(A)+1}\right)^{2k}$.

Q52. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, et que $\|A\ell - y\|_2 = \displaystyle\min_{x \in M_{p,1}(\mathbb{R})}\|Ax - y\|_2$.

◇ Fin ◇

M085 - 24 février 2026 - 15:26:54

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Séries numériques et vectorielles
- Nombres réels et suites numériques
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi