Concours Centrale-Supélec, France

Session 2026, filière TSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : matrices de Pascal
- Partie B : étude d'une suite et d'une série entière
- Partie C : permutations de [[1, n]]
- Partie D : graphes de permutations sans boucle

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/tsi/2026/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

TSI — 4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Dans tout le problème n désigne un entier naturel. $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n dont la base canonique est $e = (1, X, \dots, X^n)$.

On rappelle également que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{j!}{i!(j-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq j \end{cases}.$$

On note $|A|$ le cardinal de tout ensemble fini A et on dit que A est **stable** par une fonction f si et seulement si f est définie en tout $x \in A$ et $f(x) \in A$.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M^\top$ désigne sa matrice transposée. I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le problème comporte 4 parties largement indépendantes. La partie A est consacrée à l'étude des matrices dites de Pascal. La partie B porte sur l'étude d'une suite numérique puis sur l'étude d'une série entière. Dans les parties C et D, $n \in \mathbb{N}^*$. La partie C est relative à deux représentations (par graphe ou par matrice) des permutations de $[\![1, n]\!]$. Enfin la partie D aborde un calcul de probabilité (seule cette partie repose sur les parties précédentes).

Partie A – Matrices de Pascal

On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère les deux applications u et v de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = P(X+1), \quad v(P) = P(X-1).$$

I – Cas particulier $n = 2$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$.

Q1. Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q2. On s'intéresse à la matrice $\mathrm{Mat}_e(u)$ obtenue précédemment. Justifier que cette matrice est inversible et calculer son inverse. Quel est le spectre de $\mathrm{Mat}_e(u)$? $\mathrm{Mat}_e(u)$ est-elle diagonalisable ?

II – Des matrices semblables à leurs inverses

On revient au cas général (ce qui signifie qu'on ne suppose plus $n = 2$ mais $n \in \mathbb{N}$ quelconque) et on admet que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

On appelle **matrice supérieure de Pascal** la matrice notée $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ représentative de u dans la base canonique e de $\mathbb{R}_n[X]$ (on numérotera les lignes et les colonnes de U par i et j appartenant à $[\![0, n]\!]$).

Q3. Montrer que U est triangulaire supérieure puis démontrer que pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ le coefficient d'indice (i,j) de U est égal à $\binom{j}{i}$. Étudier la diagonalisabilité de U.

Q4. Déterminer $u \circ v$, en déduire que u est bijective puis que U est inversible et déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la matrice U^{-1}. Ce résultat est-il cohérent avec la matrice inverse calculé en **Q2** ?

Q5. On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, le i-ème coefficient diagonal est $(-1)^i$. Démontrer que D est inversible et égale à son inverse.

Q6. Calculer DU et $U^{-1}D$ et en déduire que $U = DU^{-1}D$ puis que U est semblable à son inverse.

Q7. On appelle **matrice inférieure de Pascal** la matrice définie par $L = U^\top$. Établir que $L = DL^{-1}D$ et en déduire que L est également semblable à son inverse.

III – Une matrice diagonalisable semblable à son inverse

On appelle enfin **matrice symétrique de Pascal** la matrice $S = LU$.

Q8. Dans cette question à nouveau on fixe $n = 2$. Calculer S et justifier que S est diagonalisable puis démontrer que le spectre de S est constitué de trois valeurs 1, α et $\frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

Q9. On revient au cas général ($n \in \mathbb{N}^*$). Justifier que S est diagonalisable, inversible et :

$$S^{-1} = (DU)S(DU)^{-1}.$$

En déduire que S est à nouveau semblable à son inverse.

Q10. Soit λ une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Démontrer que $\lambda > 0$ (on pourra pour cela calculer de deux façons $X^\top SX$).

Q11. Démontrer que le spectre de S est stable par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Q12. En considérant la matrice A ci-dessous, déterminer si, réciproquement, une matrice inversible dont le spectre est stable par $x \mapsto \frac{1}{x}$ est toujours semblable à son inverse (on pourra calculer la trace de A).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

IV – Calcul des coefficients de S à l'aide d'un dénombrement dans un graphe

On considère le graphe orienté G_n dont les sommets sont les couples $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ ainsi qu'un sommet particulier appelé **source** et noté s. Les arcs de G_n sont les suivants : un arc de s vers $(0,0)$ (un tel arc est noté $s \to (0,0)$) et les arcs $(i,j) \to (i,j+1)$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n-1]\!]$ et les arcs $(i,j) \to (i+1,j)$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n-1]\!] \times [\![0,n]\!]$. Par exemple, on a représenté ci-dessous le graphe G_3 :

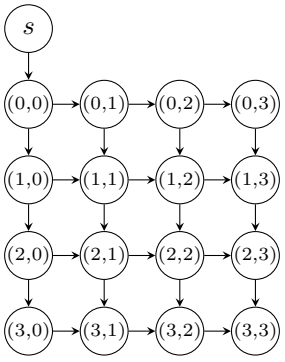


Figure 1 – Graphe G_3.

Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on s'intéresse à l'ensemble des chemins de s vers (i,j) dans G_n et on note cet ensemble $\Omega_{i,j}$. Par exemple il n'y a qu'un seul chemin de s vers $(0,0)$ qui est l'arc $s \to (0,0)$ ainsi $\Omega_{0,0}$ est le singleton :

$$\Omega_{0,0} = \big\{ s \to (0,0) \big\}.$$

Si $n \geq 2$, il y a trois chemins de s vers $(1,2)$ et $\Omega_{1,2}$ est l'ensemble à trois chemins :

$$\Omega_{1,2} = \big\{ \begin{array}{l} s \to (0,0) \to (0,1) \to (0,2) \to (1,2), \\ s \to (0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,2), \\ s \to (0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (1,2) \end{array} \big\}.$$

Q13. Déterminer $\Omega_{2,2}$ et vérifier que $|\Omega_{2,2}| = 6$ puis justifier que, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $|\Omega_{i,j}| = \binom{i+j}{i}$.

Q14. Soient $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ et $k \in [\![0,i]\!]$. On note A_k l'événement «le chemin passe par le sommet $(k, i-k)$». En remarquant qu'un chemin de A_k est constitué d'un chemin de s vers $(k,i-k)$ puis d'un chemin de $(k,i-k)$ vers (i,j), déterminer $|A_k|$ et montrer que $(A_k)_{k\in[\![0,i]\!]}$ est un système complet d'événements puis en déduire que :

$$\binom{i+j}{i} = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\binom{j}{i-k}.$$

Q15. Déduire de cette formule que le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ de S est égal à $\binom{i+j}{i}$.

Partie B – Étude d'une suite et d'une série entière

I – Étude d'une suite

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}). \end{cases}$$

Q16. Vérifier que $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

Q17. Écrire une fonction Python `liste_an(n)` prenant en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et renvoyant la liste $[a_0, \dots, a_n]$.

Q18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Q19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n!$.

Q20. On cherche à déterminer une caractérisation de l'entier a_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et à en déduire un équivalent simple. À cette fin, on considère la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dont on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ la somme partielle. Démontrer que cette série converge, préciser sa limite et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \leq S_{n+1} \ \text{ ou } \ S_{n+1} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \leq S_n.$$

Q21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n!S_n$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est le plus proche entier de $\frac{n!}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire que a_n est l'unique entier tel que $|\frac{n!}{\mathrm{e}} - a_n| < \frac{1}{2}$.

Q22. En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{\mathrm{e}}$.

II – Étude d'une série entière

L'étude de la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!}x^n$, dont on note $s(x)$ la somme, va nous permettre d'obtenir une autre relation satisfaite par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q23. Montrer que R, le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$, est égal à 1 (on pourra utiliser **Q21**) puis que s est solution du système ci-dessous sur $]-1,1[$:

$$\begin{cases} (1-x)y' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Q24. Résoudre le système précédent afin d'en déduire une expression explicite de $s(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Q25. Appliquer la formule de Leibniz au calcul de la dérivée p-ème de $x \mapsto \mathrm{e}^x s(x)$ évaluée en 0, et après avoir rappelé le lien entre a_k et $s^{(k)}(0)$ (pour $k \in \mathbb{N}$) , en déduire que :

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \quad p! = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k.$$

Partie C – Permutations de $[\![1, n]\!]$

On rappelle que dorénavant, $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **permutation** de $[\![1, n]\!]$ toute application bijective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même et on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

I – Représentations d'une permutation

On propose deux manières de représenter une permutation σ de $[\![1, n]\!]$. La première consiste à considérer un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $[\![1, n]\!]$ et pour lequel il existe un arc du sommet i vers j si et seulement si $\sigma(i) = j$. Par exemple, $\sigma \in \mathcal{S}_6$ définie par $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 6$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 4$, $\sigma(6) = 3$, est représentée par le graphe $G(\sigma)$ ci-dessous :

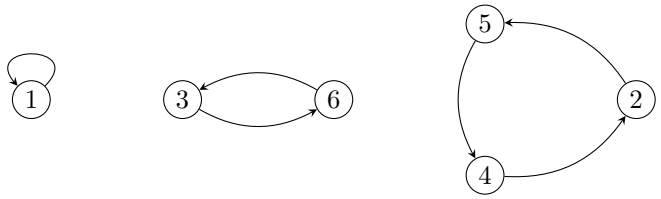


Figure 2 – Un graphe $G(\sigma)$ représentatif d'une permutation σ.

On remarquera qu'il ne s'agit pas d'un graphe au sens strict du terme puisqu'on s'autorise un arc allant d'un sommet i vers le même sommet i. Un tel arc sera dorénavant appelé une **boucle**. De même s'il existe un arc du sommet i vers le sommet $j \neq i$ et un arc du sommet j vers le sommet i on parlera de **bi-boucle**. Par exemple le graphe représenté précédemment comporte la boucle $1 \to 1$ et la bi-boucle $3 \to 6 \to 3$.

La seconde manière de représenter une permutation de $\mathcal{S}_n$ consiste à écrire une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont on numérote les lignes et les colonnes par i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$) tel que le coefficient d'indice $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vaut 1 si et seulement si $\sigma(i) = j$. Par exemple, σ définie précédemment est représentée par la matrice :

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Figure 3 – Une matrice $M(\sigma)$ représentative d'une permutation σ.

On admet que ces deux représentations définissent deux bijections G et M de $\mathcal{S}_n$ vers $G(\mathcal{S}_n)$ d'une part et de $\mathcal{S}_n$ vers $M(\mathcal{S}_n)$ d'autre part, autrement dit :

$$\forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2, \quad \sigma = \tau \Leftrightarrow G(\sigma) = G(\tau) \Leftrightarrow M(\sigma) = M(\tau).$$

Q26. Représenter le graphe de la permutation dont la matrice représentative est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 4 – Une matrice représentative d'une permutation dont on cherche le graphe représentatif.

Q27. Donner la matrice représentative de la permutation dont le graphe représentatif est :

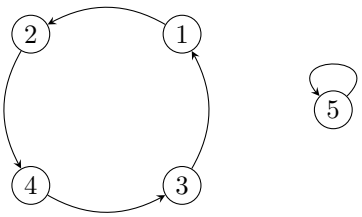


Figure 5 – Un graphe représentatif d'une permutation dont on cherche la matrice représentative.

II – Propriétés

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Q28. Calculer $M(\sigma)M(\sigma^{-1})$ et en déduire que $M(\sigma)$ est inversible et :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma^{-1}).$$

Q29. Expliquer comment représenter $G(\sigma^{-1})$ à partir de $G(\sigma)$ et $M(\sigma^{-1})$ à partir de $M(\sigma)$. En déduire que :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma)^{\top}.$$

Q30. Démontrer que :

$$M(\sigma^2) = M(\sigma)^2.$$

III – Matrices de permutation diagonalisables

On se propose de démontrer le théorème ci-dessous :

Une matrice $M(\sigma)$ représentative de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est diagonalisable si et seulement si le graphe $G(\sigma)$ représentatif de σ ne contient que des boucles ou des bi-boucles.

Q31. Commençons par un exemple. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice introduite en **Q25** est égal à $\chi = (X-1)^3(X+1)$ puis étudier sa diagonalisabilité. Cela est-il cohérent avec le théorème que l'on se propose de démontrer ?

Q32. Traitons le sens direct en fixant $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $M(\sigma)$ est diagonalisable. Démontrer que si λ est valeur propre de $M(\sigma)$ alors $\lambda^2 = 1$ (on pourra s'inspirer de **Q10**).

Q33. En déduire qu'il existe $q \in [\![0, n]\!]$ tel que $M(\sigma)$ est semblable à la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ci-dessous comportant q fois le coefficient 1 et $n-q$ fois le coefficient -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Q34. En déduire que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ puis que $G(\sigma)$ ne contient que des boucles ou des bi-boucles.

Q35. Traiter la réciproque.

Partie D – Graphes de permutations sans boucle

I – Introduction

On se propose de calculer la probabilité qu'un graphe de $G(\mathcal{S}_n)$, choisi de façon aléatoire, soit sans boucle.

Notons B_n l'événement «le graphe choisi est sans boucle», b_n le cardinal de B_n et X_n la variable aléatoire qui au graphe choisi associe le nombre de boucle(s) de celui-ci.

Pour cela, on utilisera deux méthodes indépendantes.

Q36. Quel est le cardinal de $G(\mathcal{S}_n)$? Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ?

Q37. On fixe par convention $b_0 = 0$. Démontrer que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(X_n = j) = \frac{\binom{n}{j} b_{n-j}}{n!}.$$

Q38. En déduire que :

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad p! = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k.$$

On pourra commencer par le cas $p = n$ puis généraliser.

Q39. Justifier que ces relations permettent de calculer b_0, b_1, …, b_n. Préciser b_1, b_2 et b_3.

II – Calcul d'une probabilité par deux méthodes

Q40. À l'aide de la série entière de somme $s(x)$ introduite en partie B.II, démontrer que :

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Q41. On utilise enfin la matrice L introduite en **Q7**. On rappelle que cette matrice appartient à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, qu'elle est inversible et triangulaire inférieure.

On note F la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}.$$

Calculer $L^{-1}F$ puis retrouver que :

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

◇ Fin ◇

M100 - 24 février 2026 - 14:57:18

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/tsi