Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

Session 2012, filière ECS

Mathématiques et informatique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1 : matrices A_m
- Problème 2, partie 1 : intégrales et extremums
- Problème 2, partie 2 : durée de vie d'un composant
- Problème 3 : estimation d'un paramètre

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie scannée d'un exemplaire imprimé : quelques marques à la main (croix, coches, mots soulignés) apparaissent en marge de la première page de l'énoncé et à la page 3.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ecs/2012/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'éducation nationale
de l'enseignement supérieur,
de la formation des cadres
et de la recherche scientifique

Présidence
du Concours National Commun aux
Ecoles de Management (CNCM)
(ENCG / ESI) 2012

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission aux
Grandes Écoles de Management (CNCM) (ENCG / ESI)

Session 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

FILIÈRES : ECS

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :
L'épreuve se compose de trois problèmes indépendants.

PROBLÈME I

✧✧✧

On considère un paramètre réel m, et les matrices suivantes :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **1.*a.*** Calculer A_m^2 et A_m^3, et vérifier que que le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2$ annule A_m.

1.*b.* Montrer que si λ est une valeur propre de A_m alors $P(\lambda) = 0$ et en déduire que : $S_p(A_m) \subset \{0, 2\}$.

2. Dans cette question **2** on étudie le cas $m = 0$ et on cherche à diagonaliser $B = A_0$.

2.*a.* Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de B.

2.*b.* Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de B.

2.*c.* Montrer que B est diagonalisable, et donner une matrice carrée inversible Q et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ telles que $B = QDQ^{-1}$.

2.*d.* Montrer l'existence de deux réels a et b tels que $B^2 = aB + bI_3$.

3. Dans cette question **3**, on suppose que le paramètre m est non nul.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A_m.

3.*a.* Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de f_m .

3.*b.* Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de f_m .
La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

3.c. On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = e_1 - e_2 = (1,-1,0) \quad ; \quad v = f_m(u) \quad ; \quad w = e_1 + e_2 - e_3 = (1,1,-1).$$

Calculer v, $f_m(v)$ et $f_m(w)$.

3.d. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à cette base.

3.e. En déduire une matrice carrée inversible P_m telle que $P_m^{-1} A_m P_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.f. Existe-t-il des réels c et d tels que $A_m^2 = cA_m + dI_3$?

PROBLÈME 2

✧✧✧

Les deux parties de ce problème sont ***indépendantes.***

1ère partie

1. **1.a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

On note, dans tout cette partie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ et on admet que $I_0 = \sqrt{\pi}$

3. **3.a.** tablir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

3.b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

3.c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

4. On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$$

4.a. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

4.b. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

4.c. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

2ème partie

Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement positif. On pose :

$$\mathrm{K}(n,\alpha) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx$$

4.a. Établir la convergence de cette intégrale.

4.b. Calculer $\mathrm{K}(n+1,\alpha)$ en fonction de $\mathrm{K}(n,\alpha)$; en déduire : $\mathrm{K}(n,\alpha) = \dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

La durée de fonctionnement, exprimée en jours, d'un certain composant électronique est une variable aléatoire D dont la densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^2 e^{-\alpha x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

4.a. Calculer β en fonction de α. Sachant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours, calculer α. Déterminer alors l'écart-type de D.

4.b. Déterminer la fonction de répartition de D, puis calculer $p(\mathrm{D} > 300)$.

4.c. On dispose de 100 composants similaires et on s'intéresse à la variable T égale à la moyenne des temps de fonctionnement de ces 100 composants.

4c.i. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable T.

4c.ii. Expliquer pourquoi on peut estimer que T suit approximativement une loi normale.

4c.iii. Déterminer le réel t tel que $\mathrm{P}(|\mathrm{T} - 200| > t) \leqslant 0{,}05$.

4.d. Déterminer la densité de probabilité de la variable : $\mathrm{X} = \sqrt{\mathrm{D}}$.

PROBLÈME 3

✧✧✧

Dans ce problème θ désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \notin [0;\theta] \\ f(t) = \dfrac{2t}{\theta^2} & \text{si } t \in [0;\theta] \end{cases}$$

4.a. **4a.i.** Montrer que f est une densité de probabilité.

On note dans toute la suite X une variable aléatoire réelle de densité f.

4.b. Déterminer la fonction de répartition F de X.

4.c. **4c.i.** Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{2\theta}{3}$.

4c.ii. Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{\theta^2}{18}$

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2 \ldots X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On cherche à estimer le réel θ à l'aide de $X_1, X_2 \ldots X_n$.

4.d. On note $T_n = \dfrac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on cherche à estimer θ avec T_n.

Montrer que T_n est un estimateur sans biais de θ et calculer son risque quadratique noté $r(T_n)$.

4.e. On note M_n la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum des valeurs prises par les variables $X_1, X_2 \ldots X_n$, de sorte que pour tout réel x, $(M_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)$.

4e.i. Montrer que pour tout réel x, $P(M_n \leq x) = (F(x))^n$. En déduire la fonction de répartition de M_n, puis montrer que M_n est une variable aléatoire à densité.

4e.ii. Montrer qu'une densité possible de M_n est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_n(t) = 2n\dfrac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} & \text{si } t \in [0;\theta] \\ g_n(t) = 0 & \text{si } t \notin [0;\theta] \end{cases}$$

4e.iii. Montrer que M_n admet une espérance et une variance, et que :

$$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1}\theta \qquad \text{et} \qquad V(M_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}\theta^2$$

4e.iv. On cherche à estimer θ avec M_n :

Calculer le biais de M_n, noté $b(M_n)$, et son risque quadratique noté $r(M_n)$.

4.f. Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $b(M_n)$ et $r(M_n)$.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Éléments propres et réduction
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ecs