Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

Session 2021, filière ECS

Mathématiques et informatique

Ce que traite le sujet

- Exercice : deux fournisseurs d'accès
- Problème 1 : suite récurrente linéaire d'ordre 2
- Problème 2 : matrice symétrique et extremum

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ecs/2021/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECS, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Exercice

Un client fréquente deux fournisseurs d'accès à internet notés F_1 et F_2. Le système de payement qui lui est proposé par chacun des fournisseurs est comme suit :

- ☐ Chez le fournisseur F_1, le client paye 2dh la première demi-heure puis 1dh la demi-heure suivante si elle est entamée puis 3dh par heure supplémentaire entamée.
- ☐ Chez le fournisseur F_2, le client paye un forfait de x dh par heure entamée (x étant une constante réelle > 0).

Par exemple :

- ✓ Pour une session de 30mn, il payera 2dh chez le fournisseur F_1 et x dh chez F_2.
- ✓ Pour une session de 35mn, il payera $3 = (2 + 1)$dh chez le fournisseur F_1 et x dh chez F_2.
- ✓ Pour une session de 1h35mn, il payera $6 = (2 + 1 + 3)$dh chez le fournisseur F_1 et $2x$ dh chez F_2.

On suppose que la durée T, exprimée en heures, passée par le client durant sa connexion lors d'une session unique, est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire égale au coût de la session chez le fournisseur F_1 (resp. F_2).

1. Étude de la variable X_1

1.1. Justifier que la variable aléatoire X_1 prend ses valeurs dans l'ensemble $\{2\} \cup \{3k \ ; \ k \in \mathbb{N}^*\}$.

1.2. Montrer que $P(X_1 = 2) = 1 - e^{-\lambda/2}$ et $P(X_1 = 3) = e^{-\lambda/2} - e^{-\lambda}$.

1.3. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $P(X_1 = 3k) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$

1.4. Montrer que la variable X_1 admet une espérance donnée par $E(X_1) = e^{-\lambda/2} - 1 + \dfrac{3}{1 - e^{-\lambda}}$.

2. Étude de la variable X_2

2.1. Justifier que la variable aléatoire X_2 prend ses valeurs dans l'ensemble $\{kx \ ; \ k \in \mathbb{N}^*\}$.

2.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_2 = kx) = P(k - 1 < T \leqslant k)$.

2.3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_2 = kx) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$.

2.4. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{x}X_2$? En déduire que la variable X_2 admet une espérance et donner la valeur de $E(X_2)$.

3. Dans cette question, on suppose que $\lambda = 2\ln 3$.

3.1. Calculer la valeur de $E(X_1) - E(X_2)$.

3.2. Quel forfait horaire maximum, exprimé en dirhams et centimes de dirhams, doit proposer le fournisseur F_2 à ses clients pour concurrencer le fournisseur F_1 ?

4. On s'intéresse ici au temps de connexion pour n clients, avec $n \geqslant 2$, dont on suppose les temps respectifs de connexion (notés $T_1, \ldots, T_n$) mutuellement indépendants et suivant tous la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

4.1. Déterminer la loi de S_n et en préciser une densité.

4.2. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance et la calculer.

4.3. En déduire en fonction de la variable $\dfrac{1}{S_n}$ un estimateur sans biais du paramètre λ.

Problème 1
Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles. On note Σ la partie de E formée des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1ère Partie
Étude de la structure de l'ensemble Σ

1.1. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de E.

1.2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

1.3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ.

1.4. Soit $r \in \mathbb{R}^*$; on considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = r^n.$$

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ si, et seulement si, $r^2 - r - 1 = 0$.

1.5. Détermination de Σ

On note r_1 et r_2 les racines du polynôme $X^2 - X - 1$, avec $r_1 > 1$.

1.5.1. Préciser les valeurs de r_1 et r_2.

1.5.2. Montrer que les suites $(r_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de Σ.

1.5.3. En déduire que $\Sigma = \left\{(\alpha\, r_1^k + \beta\, r_2^k)_{k\in\mathbb{N}}\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1.6. On note $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$ et la relation $\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1} + \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ et en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(r_1^n + \frac{(-1)^{n+1}}{r_1^n}\right).$$

1.7. Écrire un code Scilab prenant en entrée l'entier naturel $n \geqslant 2$ et retournant γ_n.

2ème Partie
Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

- ✓ *X_0 et X_1 sont* indépendantes *et suivent chacune une loi de* Poisson *de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;*
- ✓ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.*

2.1. Calculer l'espérance $E(X_0)$ de la variable aléatoire X_0.

2.2. Calculer la variance $V(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.

2.3. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

2.4. Étude de l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2

2.4.1. Justifier que $X_2 \geqslant X_1$ puis donner la probabilité de l'événement

$$A = \{w \in \Omega \ ; \ X_1(w) = 1 \text{ et } X_2(w) = 0\}.$$

2.4.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

2.5. Expression de X_n en fonction de X_0 et X_1 pour $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \gamma_{n-1} X_0 + \gamma_n X_1,$$

où $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **1.6.** de la première partie.
On pourra raisonner par récurrence double.

2.6. Éspérance et variance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}$

2.6.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_n admet une espérance, notée $E(X_n)$, et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.6.2. Montrer que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda + \mu\, r_1}{\sqrt{5}}\, r_1^{n-1}$.

2.6.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_n admet une variance, notée $V(X_n)$, et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.7. Soient n et m deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

2.7.1. Calculer, en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$ des deux variables aléatoires X_n et X_m.

2.7.2. Que peut-on alors en conclure au sujet des variables aléatoires X_n et X_m ?

2.8. Soient n et m deux entiers naturels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple (n, m) pour que les variables aléatoires X_n et X_m soient indépendantes.

Problème 2

Réduction d'une matrice symétrique réelle
Application à la recherche d'un extrémum local

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3 et I_3 la matrice identité d'ordre 3. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M et $\mathrm{Tr}\,(M)$ sa trace ; on rappelle que ${}^t({}^tM) = M$.

1ère Partie
Réduction d'une matrice symétrique réelle

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associées à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1.1. Calculer le rang de la matrice A.

1.2. Préciser la dimension du noyau $\mathrm{Ker}\, u$ de u et en déduire que 0 est valeur propre de A.

1.3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.4. Préciser l'ordre de multiplicité da la valeur propre 0 de A.

1.5. On note $\lambda < \mu$ les valeurs propres non nulles de A.

1.5.1. Calculer $\lambda + \mu$.

1.5.2. Calculer la trace de la matrice A^2 et montrer qu'elle vaut $\lambda^2 + \mu^2$.

1.5.3. Déduire de ce qui précède que $\lambda = 4$ et $\mu = 6$.

1.6. Déterminer les sous-espaces propres de l'endomorphisme u.

1.7. On note $e'_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

1.7.1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.7.2. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$.

1.8. On pose $P = \begin{pmatrix} -a & b & c \\ a & b & -c \\ 2a & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels non nuls.

1.8.1. Montrer que la matrice P est inversible.

1.8.2. Déterminer les triplets (a, b, c), de réels non nuls, pour lesquels ${}^tPP = I_3$.

1.9. Dans cette question, on choisit un triplet (a, b, c) pour lequel la matrice P vérifie ${}^tPP = I_3$. Justifier sans faire de calcul que $A' = {}^tPAP$.

2ème Partie
Application à la recherche d'un extrémum local

On désigne par f la fonction numérique de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y^4 - 4y^3.$$

2.1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.2. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f.

2.3. Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) de réels tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ et le déterminer.

2.4. Justifier que si f présente un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ alors $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2.5. Dans cette question, on choisit un triplet (a, b, c) pour lequel la matrice P, définie à la question **1.8.** ci-dessus, vérifie ${}^tPP = I_3$. On rappelle que l'on a $A' = {}^tPAP$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on note u, v et w les réels tels que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ y \end{pmatrix}$.

2.5.1. Montrer que $\begin{pmatrix} x & y^2 & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

2.5.2. En calculant les produits matriciels ci-dessus, trouver une relation entre $f(x, y)$ et $4v^2 + 6w^2$.

2.5.3. Conclure que f présente un minimum local en $(0, 0)$.

2.6. Retrouver le résultat de la question **2.5.3.** précédente en utilisant la matrice hessienne de f en $(0, 0)$.

Fin de l'épreuve

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Algèbre bilinéaire
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ecs