Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

# Session 2022, filière ECS

## Mathématiques et informatique

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Problème 1 : matrice A et système différentiel
- Problème 2 : fonction définie par une intégrale
- Problème 3 : loi de Pareto

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ecs/2022/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Royaume du Maroc

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير - القنيطرة
Ecole Nationale de Commerce et de Gestion - Kénitra

## Présidence du CNAEM 2022

Ecole Nationale de Commerce et de Gestion de Kénitra

Université Ibn Tofaïl

# CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS AUX ECOLES DE MANAGEMENT

*Edition 2022*

**Epreuve : Mathématiques et Informatique**

**Filière : ECS**

**Durée : 4 heures**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de tout document ou de tout appareil électronique est strictement interdit.

Durée : 4 heures.

* * * * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Remarques générales :**

L'épreuve se compose trois problèmes indépendants.

* * * * *

## Problème 1

On rappelle que $\mathbf{R}^3$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et on note $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont $A$ est sa matrice relativement à la base $\beta$.

### Partie 1
### Diagonalisation de la matrice $A$

1. a) Vérifier que $A^2 - \frac{1}{4}I = O$.
   b) En déduire un polynôme annulateur de la matrice $A$.
   c) Déterminer les valeurs propres éventuelles de $A$ notées $\lambda_1$ et $\lambda_2$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. On pose $u = (1,1,2)$, $v = (1,1,1)$, $w = (-1,1,0)$.
   a) Vérifier que $u$, $v$ et $w$ sont des vecteurs propres de $f$ dont on précisera les valeurs propres de chacun.
   b) Montrer que $\beta' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   c) En déduire que $A$ est une matrice diagonalisable.
   d) i) Déterminer $P$ la matrice de passage de la base $\beta$ à la base $\beta'$.
      ii) Calculer $PQ$ et en déduire que $P$ est inversible et déterminer son inverse $P^{-1}$.
   e) En déduire qu'il existe une matrice diagonale $D$ à préciser, telle que $AP = PD$.

### Partie 2
### Applications

1. L'objectif de cette question est de déterminer les puissances de la matrice $A$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n$,
   $$A^n = \frac{1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1}+3 & (-1)^{n+1}+1 & 2((-1)^n-1) \\ (-1)^{n+1}+1 & (-1)^{n+1}+3 & 2((-1)^n-1) \\ 2((-1)^{n+1}+1) & 2((-1)^{n+1}+1) & 2(2(-1)^n-1) \end{pmatrix}.$$

2. Dans cette question, on s'intéresse à résoudre un système différentiel linéaire.
   On considère le système différentiel linéaire suivant :
   $$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}y(t) - z(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) - \frac{1}{2}z(t) \end{cases},$$
   avec les conditions initiales suivantes : $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.
   On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, ainsi $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

a) Établir que $X'(t) = AX(t)$.

b) i) Vérifier que $QX'(t) = DQX(t)$.

ii) En faisant le changement de variable $Z(t) = QX(t)$, vérifier que $Z'(t) = DZ(t)$.

iii) On pose $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$, déterminer les fonctions $z_1$, $z_2$ et $z_3$.

c) En déduire la solution du système différentiel $(S)$.

## Problème 2

Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ par,

$$g(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{e^{-2tx}}{1+t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

### Partie 1
### Quelques propriétés d'une fonction définie à partir d'une intégrale

1. a) Vérifier que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g(x,t) = 0$.

b) En déduire que, pour tout $x \in ]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ converge.

**On considère par la suite, la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$.**

2. a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^{-2tx}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{e^{-2u}}{x+u}du$.

b) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^{-2tx}}{1+t}dt \geq e^{-2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

c) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f(x) \geq e^{-2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

d) En déduire $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

3. a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $0 < f(x) \leq \frac{1}{2x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $\int_0^{+\infty} te^{-2tx}dt = \frac{1}{4x^2}$.

b) En déduire que pour tout réel $x$ strictement positif, $\left|f(x) - \frac{1}{2x}\right| \leq \frac{1}{4x^2}$.

c) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

### Partie 2
### Applications de la fonction $f$

1. Montrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t}e^{-2tx}dt$ converge.

2. Soit $x$ un réel strictement positif et soit $h$ un réel non nul tel que $|h| < \frac{x}{2}$.

a) Montrer que pour tout réel $t$ positif, $|e^{-2th} - 1 + 2th| \leq 2h^2t^2e^{2t|h|}$.

b) Montrer que pour tout réel $t$ positif, $\left|\frac{e^{-2th} - 1 + 2th}{(1+t)h}\right| \leq 2|h|t^2e^{tx}$.

c) En déduire que $\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 2\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t}e^{-2tx}dt\right| \leq 2|h|\int_0^{+\infty} t^2e^{-tx}dt$.

d) En déduire que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel $x$ strictement positif,

$$f'(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-2tx} dt$$

3. On considère l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$ suivante : $(E)$ $\quad y'' - 4y = \frac{1-2x}{x^2}$

a) Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f'(x) = \frac{-1}{x} + 2f(x)$.

b) Montrer que la fonction $f$ est une solution particulière sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E)$.

c) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E)$.

4. On considère pour tout réel $x$ strictement positif, la fonction $h_x$ définie sur $\mathbf{R}$ par,

$$h_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{f(x)}\left(\frac{e^{-2tx}}{1+t}\right) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que $h_x$ est une densité de probabilité.

b) Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant pour densité $h_x$. Montrer que $X$ admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.

## Problème 3

Dans tout le problème, $\lambda$ et $\theta$ désignent deux réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\theta)}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par,

$$f_{(\lambda,\theta)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ \frac{\lambda\,\theta^{\lambda}}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}.$$

### Partie 1
### La variable aléatoire à densité $f_{(\lambda,\theta)}$

1. Montrer que $f_{(\lambda,\theta)}$ est une densité de probabilité.
**Ainsi, on considère la variable aléatoire notée $X_{(\lambda,\theta)}$ admettant $f_{(\lambda,\theta)}$ comme densité. On dit ainsi que la variable aléatoire $X_{(\lambda,\theta)}$ suit la loi de Pareto de paramètres $\lambda$ et $\theta$.**
**Par la suite, pour alléger l'écriture, on va noter $X_{(\lambda,\theta)}$ tout simplement $X$.**

2. Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de la variable aléatoire $X$.

3. Montrer que $X$ admet une espérance $E(X)$ si, et seulement si, $\lambda > 1$ et déterminer dans ce cas sa valeur en fonction de $\lambda$ et $\theta$.

4. Montrer que $X$ admet une variance $V(X)$ si, et seulement si, $\lambda > 2$ et déterminer dans ce cas sa valeur en fonction de $\lambda$ et $\theta$.

5. Soit $n_0 = \lfloor\theta\rfloor + 1$, où $\lfloor\theta\rfloor$ désigne la partie entière de $\theta$. On considère la suite $(u_k)_{k\geq n_0}$ définie de la façon suivante, pour tout entier naturel $k$ tel que $k \geq n_0$, $u_k = P\left(k \leq X \leq k+1\right)$.

a) Déterminer, pour tout entier naturel $n$ tel que $n \geq n_0$, l'expression de $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ en fonction de $\lambda$, $\theta$, $n_0$ et $n$.

b) En déduire que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série convergente et déterminer sa somme en fonction de $\lambda$ et $\theta$.

c) Soit $k$ un entier naturel tel que $k \geq n_0$, déterminer $P_{\left(X\geq k\right)}\left(X \leq k+1\right)$ en fonction de $\lambda$ et de $k$, la probabilité de l'événement $\left(X \leq k+1\right)$ sachant que l'événement $\left(X \geq k\right)$ est réalisé.

d) Écrire un programme en Scilab qui détermine et affiche le plus petit entier naturel $n$ ($n \geq n_0$), tel que $P_{(X \geq n)}\left(X \leq n+1\right) \leq 10^{-5}$, dans le cas où $\lambda = 4$ et $\theta = \sqrt{3}$.

6. On considère la variable aléatoire $Y_\lambda = \ln(X_{(\lambda,1)})$.

a) Montrer que $Y_\lambda$ suit une loi usuelle qu'on précise son paramètre en fonction de $\lambda$.

b) Déterminer l'espérance $E(Y_\lambda)$ et la variance $V(Y_\lambda)$ de la variable aléatoire $Y_\lambda$.

c) Écrire un programme Scilab simulant la variable aléatoire $Y_\lambda$, qui renvoie une matrice à une ligne et cent colonnes contenant cent réalisations de $Y_\lambda$, le réel $\lambda$ strictement positif étant donné par l'utilisateur, (on pourra utiliser la commande grand).

## Partie 2
## Comparaison de deux estimateurs du paramètre $\theta$

Dans cette partie, on prend $\lambda = 4$ et on note la variable aléatoire $X_{(4,\theta)}$ par $X_\theta$. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ qui suivent la même loi que $X_\theta$. Pour tout entier naturel non nul $n$, on considère les variables aléatoires suivantes :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad T_n = \min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \quad \text{et} \quad N_n = \frac{4n-1}{4n} T_n$$

1. a) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $S_n$.

b) En déduire un estimateur noté $M_n$ sans biais de $\theta$ de la forme $\alpha S_n$ où $\alpha$ est un réel à préciser.

c) Déterminer la variance de la variable aléatoire $M_n$.

d) En déduire le risque quadratique de l'estimateur $M_n$, noté $r(M_n)$.

2. a) Déterminer la fonction de répartition $F_{T_n}$ de la variable aléatoire $T_n$.

b) En déduire que $T_n$ est une loi de Pareto à préciser ses paramètres.

c) Montrer que $N_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

d) En déduire le risque quadratique de l'estimateur $N_n$, noté $r(N_n)$.

3. Quelle est l'estimateur le plus performant $M_n$ ou $N_n$? Justifier votre réponse.

FIN DE L'ÉPREUVE

★ ★ ★ ★ ★

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Éléments propres et réduction
- Variables aléatoires finies et lois usuelles

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ecs