Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

Session 2023, filière ECS

Mathématiques et informatique

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : matrice aléatoire
- Exercice 2 : un problème d'extremum
- Exercice 3 : à propos d'estimateurs
- Problème : suites récurrentes linéaires d'ordre 3

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ecs/2023/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECS, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de trois exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice 1
Probabilité qu'une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit diagonalisable

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. On suppose ici que $\alpha = \beta$.

(i) Vérifier que α est l'unique valeur propre de A.

(ii) Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2).$$

Pour traiter cette partie, on utilisera avec profit les résultats de la section précédente.

1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer de la probabilité $\mathbb{P}(Y > k)$ en fonction de k et p_2.

1.2.3. On considère la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(U > k)$.

(i) En déduire que la variable aléatoire U suit une loi géométrique de paramètre $(1 - p_1)(1 - p_2)$.

1.2.4. Calcul de $\mathbb{P}(X < Y)$

(i) Montrer que la suite $\Big((X = k) \cap (Y > k)\Big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall\, w \in \Omega, \quad M(w) = \begin{pmatrix} X(w) & 0 \\ 1 & Y(w) \end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2
Un problème d'extremum

On désigne par f la fonction numérique de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2.$$

1.1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.2. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f.

1.3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{ll}(x+y)(x^2-xy+y^2) & =0\\ x^3-x+y & =0\end{array}\right.$.

1.4. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$ puis en déduire que

$$x^2-xy+y^2=0\Longleftrightarrow x=y=0.$$

1.5. Soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

(i) Montrer que (x_0,y_0) est un point critique de f si, et seulement si, $(x_0,y_0)\in\big\{(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\big\}$.

(ii) Justifier que si f présente un extremum local au point (x_0,y_0), alors

$$(x_0,y_0)\in\big\{(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\big\}.$$

1.6. Montrer que f ne présente ni un maximum local ni un minimum local au point critique $(0,0)$.
On pourra étudier les signes de $f(x,x)$ et de $f(x,-x)$ si $0<|x|<2$.

2. Étude de la nature du point critique $(x_0,y_0)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

2.1. Calculer les dérivées partielles secondes de f au point (x_0,y_0).

2.2. À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction f présente un extremum local au point (x_0,y_0) et préciser $f(x_0,y_0)$. Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude de la nature du point critique $(x_0,y_0)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

En remarquent que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=f(-x,-y)$, montrer que le point critique $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ est de même nature que le point $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

4. Étude plus approfondie de l'extremum en question

4.1. Soit$(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Vérifier que $2|uv|\leqslant u^2+v^2$.

4.2. En déduire que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x-y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$.

4.3. Montrer qu'en fait la fonction f présente un minimum absolu strict au point $(x_0,y_0)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
On pourra remarquer que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)\geqslant(x^2-2)^2+(y^2-2)^2-8.$$

Exercice 3
À propos d'estimateurs

Soit $\theta>0$ et soit X la variable aléatoire définie sur définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta>0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, et de même loi que X. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la moyenne empirique $\overline{X}_n$ et la variance empirique $\overline{S}_n$ de $X_1,X_2,\ldots,X_n$ par :

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\quad\text{et}\quad\overline{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X}_n)^2.$$

1.1. Rappeler la loi de la variable aléatoire X et préciser son espérance et sa variance.

1.2. Montrer que la variable aléatoire X_1+X_2 suit la loi de Poisson de paramètre 2θ.

Dans la suite, on admet que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$.

1.3. Soit n un entier naturel non nul.

1.3.1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ et que son risque quadratique est $b_\theta(\overline{X}_n) = \dfrac{\theta}{n}$.

1.3.2. Montrer que $n\overline{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X}_n^2$ puis en déduire l'espérance de $\overline{S}_n$.

1.3.3. Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

1.3.4. Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $\widehat{S}_n = \frac{n}{n-1}\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

Problème

Étude de suites récurrentes linéaire d'ordre 3

Dans ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles. Pour tout réel α, on note Σ_α la partie de E formée des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = (\alpha+3)u_{n+2} - (3\alpha+2)u_{n+1} + 2\alpha u_n.$$

1ère Partie
Détermination de Σ_0

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = 0$ et on cherche l'ensemble Σ_0 des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}.$$

On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$e_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1,\ e_n = 0.$$

1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à Σ_0. On pose $\lambda = \dfrac{u_2 - 3u_1 + 2u_0}{2}$ et on considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \lambda e_n.$$

1.1.1. Vérifier que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$.

1.1.2. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.

1.1.3. Montrer que le système linéaire $\begin{cases} x + y &= v_0 \\ x + 2y &= v_1 \end{cases}$, d'inconnue (x, y), admet une unique solution notée $(\mu, \delta) \in \mathbb{R}^2$ et la déterminer.

1.1.4. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \mu + \delta\, 2^n$.

1.1.5. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda e_n + \mu + \delta\, 2^n$.

1.2. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = ae_n + b + c\, 2^n.$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de Σ_0.

1.3. Conclure que $\Sigma_0 = \left\{(ae_n + b + c\, 2^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

2ème Partie
Détermination de Σ_3

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = 3$ et on cherche l'ensemble Σ_3 des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.1. Démontrer que les suites constantes appartiennent à Σ_3.

2.2. Expression de U_n à l'aide de A et de U_0

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_3$; on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.2.1. Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.

2.2.2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

2.3. Calcul des puissances de la matrice A

2.3.1. Montrer que la matrice P est inversible.

2.3.2. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.

2.3.3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

2.4. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_3$.

2.4.1. Montrer, en utilisant ce qui précède, qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = a + b\,2^n + c\,3^n$.

2.4.2. Démontrer que a, b et c s'expriment chacun linéairement en fonction de u_0, u_1 et u_2.

2.5. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = x + y\,2^n + z\,3^n.$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de Σ_3.

2.6. Conclure que $\Sigma_3 = \left\{(a + b\,2^n + c\,3^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

2.7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Σ_3 telle que $(u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 1)$.

2.7.1. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.

2.7.2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.7.3. Écrire un code, en langage Scilab ou en Python, permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^5$.

3ème Partie
Détermination de Σ_α dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

3.1. Montrer que Σ_α est un sous-espace vectoriel de E.

3.2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Sigma_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

3.3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ_α.

3.4. Soit $r \in \mathbb{R}^*$; on considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad w_n = r^n.$$

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_\alpha$ si, et seulement si, $r^3 - (\alpha+3)r^2 + (3\alpha+2)r - 2\alpha = 0$.

3.5. Détermination de Σ_α

3.5.1. Vérifier que $X^3 - (\alpha+3)X^2 + (3\alpha+2)X - 2\alpha = (X-1)(X-2)(X-\alpha)$.

3.5.2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha^n)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de Σ_α.

3.5.3. En déduire que $\Sigma_\alpha = \left\{(a + b\,2^n + c\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Fin de l'épreuve

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECS chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Éléments propres et réduction
- Suites réelles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ecs