Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

# Session 2013, filière ECT

## Mathématiques

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3
- Problème

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ect/2013/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de la
Formation des Cadres

Présidence
du Concours National d'Accès aux
Écoles de Management
CNAEM 2013

# CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS

# Aux Écoles de Management (CNAEM)

---

Session 2013

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

## FILIÈRES : **ECT**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

*Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*
*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Remarques générales :**
L'épreuve se compose de quatres exercices indépendants.

# EXERCICE 1

✧✧✧

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

**1.** Montrer que la matrice P est inversible et que sa matrice inverse est donnée par :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2.** Vérifier, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^n=\begin{pmatrix} 2(-1)^n-1 & 2+2(-1)^{n+1} & (-1)^n-1 & (-1)^n-1 \\ 2^n-1 & -2^n+2 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & -2^n+1 & 2^n & 2^n-1 \\ 2(-1)^{n+1}+2^n+1 & 2(-1)^n-2^n-1 & (-1)^{n+1}+2^n & (-1)^{n+1}+2^n+1 \end{pmatrix}$$

**3.** Montrer que $PDP^{-1}=A$

**4.** Donner l'expression de $A^n$ en fonction de $n$, P, $P^{-1}$ et $D^n$.

**5.** Retrouver, pour tout entier naturel $n$, les coefficients de la matrice $A^n$ en fonction de $n$ uniquement.

**6.** On considère quatres suites $(u_n)$ $(v_n)$ $(w_n)$ et $(t_n)$ définies par des conditions initiales

$u_0$, $v_0$, $w_0$, $t_0$ et par les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 4v_n - 2w_n - 2t_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n + t_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n + t_n \\ t_{n+1} = 5u_n - 5v_n + 3w_n + 4t_n \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$

**7.** Reconnaître, pour tout entier naturel $n$, le produit $AX_n$.
En déduire l'expression de $X_n$ en fonction des matrices $A^n$, $X_0$ et de l'entier naturel $n$.

**8.** En déduire l'expression des suites $u_n$, $v_n$ $w_n$ et $t_n$ en fonction de $n$ uniquement dans le cas où $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, $w_0 = 1$, et $t_0 = 2$.

# EXERCICE 2

✧✧✧

On note

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x^2-1)(2x-3) \end{aligned}$$

**1.** **1.*a.*** Montrer que

$$\forall x \in [3, +\infty[ \quad (x-1)(2x-3) \geq 4$$

**1.*b.*** En déduire que

$$\forall x \in [3, +\infty[ \quad f(x) \geq 4(x+1)$$

**1.*c.*** En déduire que

$$\forall x \in [3, +\infty[ \quad f(x) \geq 3$$

**2.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

**2.*a.*** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 3^{n+1}$$

**2.*b.*** En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$

**2.*c.*** Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n$ tel que $u_n \geq 9^9$

**3.** **3.*a.*** Trouver trois réels $a, b, c$ tels que :

$$\forall x \in [3, +\infty[ \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x-3}$$

**3.*b.*** Montrer que l'intégral $\int_3^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ est convergente et Calculer sa valeur.

# EXERCICE 3

✧✧✧

Pour cette exercice on donne $e^{-1} = 0.368$
Dans un centre d'appel, une étude a montré que la durée en minute d'une communication téléphonique est assimilée à une variable aléatoire à densité X dont la fonction de répartition F est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F(x) = 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

**1.** Calculer $P(0 \leq X \leq 1)$

**2.** Déterminer la densité $f$ de la loi X.

**3.** Calculer E(X) , l'espérance mathématique de X.

**4.** On considère 1000 appels et on décide de comptabiliser le nombre d'appels dont la durée est comprise entre 0 et 1.
Soit Y le nombre d'appels dont la durée ne dépasse pas 1.

**4.*a.*** donner la loi de Y.

**4.*b.*** Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.

# PROBLÈME

✧✧✧

## 1ère partie

on définit la suite $(u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**1.** Montrer que la suite $(v_n)$ définit par $v_n = u_n - \frac{1}{4}$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

**2.** Donner l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ seulement.

**3.** En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ seulement.

## 2ème partie

Une entreprise a mis en observation quatres techniciens en stage dans chacun de ses quatres sites différents numéroté 1, 2, 3, et 4. Afin d'évaluer leur compétence en fin de stage, l'ingénieur chef se déplace d'une façon aléatoire dans les quatres sites selon le protocole suivant :

- Au départ l'ingénieur passe le premier jour au site 1.
- Lorsque l'ingénieur est un jour donné dans un site, il se déplace le jour suivant sur l'une quelconque des trois autres site, et ceci d'une façon équiprobable.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du site dans lequel se trouve l'ingénieur au jour $n$. On a donc $X_0 = 1$.

**4.** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4)$$

**5.** En déduire que pour pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

**6.** Utiliser la première partie pour donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de $n$ seulement.

**7.** En procédant de la même façon que la question précédente, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n$$

**8.** Montrer par récurrence sur $n$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n$$

**9.** Déterminer l'espérance $E(X_n)$ de $X_n$

**10.** Étudier les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 4)$. Interpreter le résultat.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Fonctions réelles : limites et continuité
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Matrices carrées : inverse et puissances
- Compléments d'intégration
- Sommes finies et séries numériques
- Probabilités sur un univers fini

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ect