Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

Session 2023, filière ECT

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ect/2023/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي و الإبتكار

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES
المدرسة الوطنية للتجارة و التسيير فاس

Présidence du CNAEM 2023

المدرسة الوطنيـــة للتجـــارة والتسييـــر بفـــاس
ÉCOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION DE FES

Concours National d'Accès aux Écoles de Management CNAEM 2023

ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵔⵜ ⵖⵓⵔ ⵜⵉⵎⵙⵙⵉⵔⵉⵏ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⵏ CNAEM 2023

Filière : ECT

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 4 heures

Consignes :

- Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
- L'usage de tout document ou de tout appareil électronique est strictement interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECT, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice

Probabilité qu'une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit diagonalisable

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. On suppose ici que $\alpha = \beta$.

(i) Vérifier que α est l'unique valeur propre de A.

(ii) Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.3. Conclure que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha \neq \beta$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2).$$

Pour traiter cette section, on utilisera avec profit les résultats de la section précédente.

1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer de la probabilité $\mathbb{P}(Y > k)$ en fonction de k et p_2.

1.2.3. On considère la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(U > k)$.

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(U = k)$ et en déduire que la variable aléatoire U suit une loi géométrique de paramètre $(1 - p_1)(1 - p_2)$.

1.2.4. Calcul de $\mathbb{P}(X < Y)$

(i) Montrer que la suite $\Big((X = k) \cap (Y > k)\Big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\forall\, w \in \Omega, \quad M(w) = \begin{pmatrix} X(w) & 0 \\ 1 & Y(w) \end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problème 1
Étude de suites récurrentes linéaire d'ordre 3

Dans ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles. Pour tout réel α, on note Σ_α la partie de E formée des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = (\alpha+3)u_{n+2} - (3\alpha+2)u_{n+1} + 2\alpha u_n.$$

1ère Partie
Détermination de Σ_0

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = 0$ et on cherche l'ensemble Σ_0 des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}.$$

On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$e_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1,\ e_n = 0.$$

1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à Σ_0. On pose $\lambda = \dfrac{u_2 - 3u_1 + 2u_0}{2}$ et on considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \lambda e_n.$$

1.1.1. Vérifier que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$.

1.1.2. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.

1.1.3. Montrer que le système linéaire $\begin{cases} x + y &= v_0 \\ x + 2y &= v_1 \end{cases}$, d'inconnue (x, y), admet une unique solution notée $(\mu, \delta) \in \mathbb{R}^2$ et la déterminer.

1.1.4. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \mu + \delta\, 2^n$.

1.1.5. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda e_n + \mu + \delta\, 2^n$.

1.2. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = ae_n + b + c\, 2^n.$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de Σ_0.

1.3. Conclure que $\Sigma_0 = \left\{(ae_n + b + c\, 2^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

2ème Partie
Détermination de Σ_3

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = 3$ et on cherche l'ensemble Σ_3 des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

On considère les matrices A, P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.1. Démontrer que les suites constantes appartiennent à Σ_3.

2.2. Expression de U_n à l'aide de A et de U_0

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_3$; on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.2.1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

2.2.2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

2.3. Calcul des puissances de la matrice A

2.3.1. Montrer que la matrice P est inversible.

2.3.2. Calculer les produits matriciels PD et AP.

2.3.3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

2.4. Expression de u_n en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_3$.

2.4.1. Montrer, en utilisant ce qui précède, qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = a + b\,2^n + c\,3^n$.

2.4.2. Démontrer que a, b et c s'expriment chacun linéairement en fonction de u_0, u_1 et u_2.

2.5. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = x + y\,2^n + z\,3^n.$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de Σ_3.

2.6. Conclure que $\Sigma_3 = \left\{(a + b\,2^n + c\,3^n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

2.7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Σ_3 telle que $(u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 1)$.

2.7.1. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.

2.7.2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.7.3. Écrire un code, en langage Scilab ou en Python, permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^5$.

Problème 2
À propos d'estimateurs

1ère Partie
Étude d'un premier cas

Soit $\theta > 0$ et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et de même loi, la loi uniforme sur le sagement $[0, \theta]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'estimateur $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ de θ.

1.1. Soit n un entier naturel non nul.

1.1.1. Montrer que T_n est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de T_n.

1.1.2. Calculer le biais de T_n, noté $b_\theta(T_n)$.

1.1.3. En déduire un estimateur sans biais de θ.

1.2. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs de θ, asymptotiquement sans biais.

2ème Partie
Étude d'un deuxième cas

Soit $\theta > 0$ et soit X la variable aléatoire définie sur définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et de même loi que X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la moyenne empirique $\overline{X}_n$ et la variance empirique $\overline{S}_n$ de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

1.1. Rappeler la loi de la variable aléatoire X et préciser son espérance et sa variance.

1.2. Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson de paramètre 2θ.

Dans la suite, on admet que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ *suit la loi de Poisson de paramètre* $n\theta$.

1.3. Soit n un entier naturel non nul.

1.3.1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ et que son risque quadratique est $b_\theta(\overline{X}_n) = \dfrac{\theta}{n}$.

1.3.2. Montrer que $n\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X}_n^2$ puis en déduire l'espérance de $\overline{S}_n$.

1.3.3. Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Matrices carrées : inverse et puissances
- Variables aléatoires discrètes infinies

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ect