Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

Session 2024, filière ECT

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnaem/ect/2024/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Concours National d'Accès aux Ecoles de Management - Présidence du CNAEM 2024

CNAEM 2024

Filière : ECT

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 4 heures

Consignes

L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECT, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice
Du calcul matriciel dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée I_2.

On considère les matrices appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.1. Vérifier que la matrice P_1 est inversible et que $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. Vérifier que $C = P_1 \Delta P_1^{-1}$, puis montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k,

$$C^k = P_1 \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} P_1^{-1}.$$

1.3. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et tout réel t, on pose $E_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} C^k = I_2 + tC + \frac{t^2}{2!}C^2 + \cdots + \frac{t^m}{m!}C^m$.

1.3.1. Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et tout réel t, $E_m(t) = P_1 \begin{pmatrix} u_m(t) & 0 \\ 0 & v_m(t) \end{pmatrix} P_1^{-1}$, avec

$$u_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(3t)^k}{k!} \quad \text{et} \quad v_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(4t)^k}{k!}.$$

1.3.2. En déduire que, pour tout $(m,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $E_m(t) = \begin{pmatrix} 2u_m(t) - v_m(t) & v_m(t) - u_m(t) \\ 2(u_m(t) - v_m(t)) & 2v_m(t) - u_m(t) \end{pmatrix}$.

1.4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, préciser les limites des suites $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(3t)^k}{k!}\right)_{m \geqslant 0}$ et $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(4t)^k}{k!}\right)_{m \geqslant 0}$ en fonction de t.

1.5. Dans la suite, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{4t} & e^{4t} - e^{3t} \\ 2(e^{3t} - e^{4t}) & 2e^{4t} - e^{3t} \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1.5.1. Vérifier que $R + T = I_2$, $3R + 4T = C$, $R^2 = R$, $T^2 = T$ et que $RT = TR = 0$.

1.5.2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t) = e^{3t}R + e^{4t}T$ et en déduire que

$$E(t) = (e^{4t} - e^{3t})C + (4e^{3t} - 3e^{4t})I_2.$$

1.5.3. Montrer que, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(s) = E(s)E(t) = E(s+t)$.

1.5.4. Montrer que, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(t) = E(s)$ si, et seulement si, $s = t$.

Problème 1
Des probabilités sur un univers fini

Les algorithmes demandés dans ce problème doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code et notamment à l'indentation. De plus, on suppose que la librairie `numpy.random` *de Python est importée avec la commande* `import numpy.random as rd`.

1ère Partie
Une autre expression de l'espérance d'une variable aléatoire discrète finie

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$ et soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

1.1. Rappeler la définition de l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.

1.2. Montrer que, pout tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P(\{X = k\}) = P(\{X > k-1\}) - P(\{X > k\})$.

1.3. Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\{X > k\})$.

1.4. Montrer de même que $E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(\{X > k\})$.

2ème Partie
Étude du cas d'un tirage avec remise

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$ et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs, **avec remise**, et on note Y la variable aléatoire réelle égale au **plus grand numéro** tiré. La variable aléatoire Y est donc à valeur dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

2.1. Calcul des probabilités $P(\{Y \leqslant k\})$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on note Y_j la variable aléatoire correspondant au résultat obtenu lors du $j-$ième tirage.

2.1.1. Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $P(\{Y_j \leqslant k\}) = \dfrac{k}{n}$. *On pourra remarquer que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_p$ suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$:*

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, p\}, \quad Y_j \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).$$

2.1.2. Montrer que $\{Y \leqslant k\} = \bigcap_{j=1}^{p} \{Y_j \leqslant k\}$.

2.1.3. Justifier que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_p$ sont indépendantes et en déduire que

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(\{Y \leqslant k\}) = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

2.2. Calculer $P(\{Y > k\})$, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et en déduire que $E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$.

2.3. Recherche d'un équivalent de $E(Y)$ lorsque n tend vers $+\infty$

2.3.1. Justifier que la suite $\left(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^p\right)_{m \geqslant 1}$ converge vers l'intégrale $\int_0^1 t^p \, \mathrm{d}t$.

2.3.2. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} E(Y)\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers le nombre rationnel $\dfrac{p}{p+1}$.

2.4. Écrire une fonction Python prenant en entrée n et p, tirant p entiers aléatoires entre 1 et n, et retournant le maximum de ces valeurs (l'appel de cette fonction est donc une expérience qui simule la variable aléatoire Y). *On pourra utiliser* `rd.randint(p,n+1)` *qui renvoie un entier compris entre les entiers p et n d'une façon aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.*

3ème Partie
Étude du cas d'un tirage sans remise

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$ et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs, **sans remise**, et on note Z la variable aléatoire réelle égale au **plus petit numéro** tiré. La variable aléatoire Z est donc à valeur dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Pour tout $(r, \ell) \in \mathbb{N}^2$, avec $\ell \leqslant r$, on note $\binom{r}{\ell}$ le coefficient binomial défini par $\binom{r}{\ell} = \dfrac{r!}{\ell!(r-\ell)!}$. Par convention, on pose $\binom{r}{\ell} = 0$ si $r < \ell$.

3.1. Calculs sur les coefficients binomiaux

3.1.1. Soit $(r, \ell) \in \mathbb{N}^2$, avec $\ell + 1 \leqslant r$. Vérifier que $\binom{r}{\ell} + \binom{r}{\ell+1} = \binom{r+1}{\ell+1}$.

3.1.2. Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$ avec $r \geqslant \ell$, on a $\displaystyle\sum_{j=\ell}^{r} \binom{j}{\ell} = \binom{r+1}{\ell+1}$. *On pourra raisonner par récurrence sur r.*

3.1.3. Calculs de coefficients binomiaux avec Python

(i) Écrire une fonction `factorielle(m)` prenant en entrée un entier $m \in \mathbb{N}$ et renvoyant sa factorielle.

(ii) Écrire une fonction `binome(n,p)` prenant en entrée un couple (n, p) d'entiers naturels, avec $p \leqslant n$, et renvoyant la valeur de l'entier $\binom{n}{p}$. *On pourra faire appel à la fonction* `factorielle(.)`.

3.2. Calcul de la probabilité $P(Z > k)$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

3.2.1. Quelles sont les issues possibles pour la variable aléatoire Z ? Quel est leur nombre ?

3.2.2. Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, à quelle condition l'événement $\{Z > k\}$ est-il réalisé ? Quel est le nombre des issues qui réalisent cet événement ?

3.2.3. Calculer alors la probabilité $P(\{Z > k\})$, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, en fonction de n, k et p.

3.3. Calcul de l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z, en fonction des entiers n et p

3.3.1. Montrer que $\binom{n}{p} E(Z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{p}$.

3.3.2. En déduire que $E(Z) = \dfrac{n+1}{p+1}$.

3.4. Calcul de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z

3.4.1. Montrer que $\binom{n}{p} E\Big(\dfrac{Z(Z-1)}{2}\Big) = (n+1)\binom{n+1}{p+1} - (p+1)\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{j+1}{p+1}$. *On pourra utiliser la question* **1.4.** *de la première partie.*

3.4.2. En déduire que $E\Big(\frac{Z(Z-1)}{2}\Big) = \dfrac{(n+1)(n-p)}{(p+1)(p+2)}$.

3.4.3. Vérifier que $V(Z) = 2E\Big(\frac{Z(Z-1)}{2}\Big) + E(Z) - (E(Z))^2$ et en déduire l'expression de la variance de la variable aléatoire Z en fonctions des entiers n et p.

Problème 2
Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et application à l'étude de trois suites réelles et à la résolution d'une équation matricielle

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère les matrices éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1ère Partie
Calcul des puissances de la matrice A

1.1. Inversibilité et inverse de P

1.1.1. Calculer le produit matriciel PQ.

1.1.2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser son inverse P^{-1}.

1.2. Relation entre les puissances des matrices A et D

1.2.1. Calculer les produits matriciels PD et AP.

1.2.2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

1.3. Calcul des puissances des matrices A et D

1.3.1. En faisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel k,

$$D^k = \frac{1}{4^k}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

1.3.2. En déduire l'expression de A^k, pour tout entier naturel k. *Il vous est demandé d'exprimer la matrice A^k, sous forme d'un tableau, en fonction de $k \in \mathbb{N}$.*

2ème Partie
Application à l'étude d'un système de suites simultanément récurrentes

On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = -1$, $y_0 = z_0 = 1$ et les relations de récurrence : $\begin{cases} 4x_{n+1} = x_n \\ 4y_{n+1} = -x_n + 2y_n \\ 4z_{n+1} = -x_n - y_n + 3z_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

2.1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

2.2. En déduire, à l'aide d'une récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^nX_0$.

2.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression de la matrice A^n, obtenue à la question **1.3.2.** de la première partie, calculer x_n , y_n et z_n en fonction de n.

2.4. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite.

3ème Partie
Application à la résolution d'une équation matricielle

On propose dans cette partie de résoudre l'équation matricielle suivante

$$X^3 = A, \tag{1}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3.1. Recherche des matrices qui commutent avec la matrice D

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.

3.1.1. Calculer les produits matriciels MD et DM.

3.1.2. En déduire que $MD = DM$ si, et seulement si, la matrice M est diagonale.

3.2. Résolution de l'équation (1)

Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $B^3 = A$; on pose $M = P^{-1}BP$.

3.2.1. Montrer que $M^3 = D$.

3.2.2. Vérifier que $MD = DM$.

3.2.3. En déduire que M est diagonale puis la déterminer.

3.2.4. Déterminer alors la matrice B.

3.2.5. Vérifier que la matrices B ainsi trouvée est effectivement solution de (1).

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Probabilités sur un univers fini
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Matrices carrées : inverse et puissances
- Sommes finies et séries numériques
- Introduction au langage Python : variables, types, instructions et fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ect