Concours national d'accès aux écoles de management (CNAEM), Maroc

Session 2025, filière ECT

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1
- Problème 2

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.
Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années : prepahelp.com/annales/cnaem/ect/2025/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

جامعة السلطان مولاي سليمان
Université Sultan Moulay Slimane
المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير - بني ملال
Ecole Nationale de Commerce et de Gestion - Béni Mellal

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي و الإبتكار
ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

Concours National D'accès aux Ecoles de Management | Présidence CNAEM 2025

CNAEM 2025

Filière : ECT

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 4 heures

Consignes :

Calculatrice et tout appareil électronique sont strictement interdits.

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECT, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Problème 1

Calcul des puissances d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et application à l'étude d'un système de trois suites réelles simultanément récurrentes

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.. On considère les matrices éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

1ère Partie
Deux premières méthodes de calcul des puissances de la matrice A

1.1. Calculs préliminaires

1.1.1. Vérifier que $A = J + 3\,I_3$.

1.1.2. Calculer J^2 et l'exprimer en fonction de J.

1.1.3. En déduire que $A^2 = 9A - 18\,I_3$.

1.2. Première méthode de calcul des puissances de la matrice A

1.2.1. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $J^n = 3^{n-1}\,J$.

1.2.2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = 3^{n-1}\left(2^n - 1\right)A + 2.3^n\left(1 - 2^{n-1}\right)I_3.$$

1.2.3. Calcul de coefficients binomiaux avec Python

(i) Écrire une fonction `factorielle(m)` prenant en entrée un entier $m \in \mathbb{N}$ et renvoyant sa factorielle.

(ii) Écrire une fonction `binome(n,p)` prenant en entrée un couple (n,p) d'entiers naturels, avec $p \leqslant n$, et renvoyant la valeur de l'entier $\binom{n}{p}$. *On pourra faire appel à la fonction* `factorielle(.)`.

1.3. Deuxième méthode de calcul des puissances de la matrice A

On considère les deux suites réelles $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée de $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$ et les relations :

$$\begin{cases}\alpha_{n+1} = 9\alpha_n + \beta_n\\ \beta_{n+1} = -18\alpha_n\end{cases}.$$

1.3.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \alpha_{n+1} - 3\alpha_n = 6\alpha_n + \beta_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 6 puis exprimer u_n en fonction de n. *On justifiera que* $u_1 = 6$.

1.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \beta_{n+1} - 6\beta_n = -6(3\alpha_n + \beta_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 3 puis exprimer v_n en fonction de n.

1.3.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 3^{n-1}\left(2^n - 1\right)$ et $\beta_n = 2.3^n\left(1 - 2^{n-1}\right)$.

1.3.4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = \alpha_n\,A + \beta_n\,I_n$.

2ème Partie
Diagonalisation de A et troisième méthode de calcul de ses puissances

On rappelle que $A^2 = 9A - 18I_3$.

2.1. Un polynôme annulateur de la matrice A et conséquence

2.1.1. Vérifier que le polynôme $X^2 - 9X + 18$ est annulateur de A, puis en déterminer les racines.

2.1.2. En déduire des valeurs propres possibles pour la matrice A.

2.2. Des calculs matriciels utiles et détermination des valeurs propres de A

2.2.1. Calculer le produit matriciel $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en fonction du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Que-peut-on en déduire ?

2.2.2. Vérifier que $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. À quelle valeur propre de A sont-ils associés ?

2.3. Inversibilité et inverse de P

2.3.1. Calculer le produit matriciel PQ.

2.3.2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser son inverse P^{-1}.

2.4. Relation entre les puissances des matrices A et D

2.4.1. En faisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel k, $D^k = \begin{pmatrix}6^k & 0 & 0\\0 & 3^k & 0\\0 & 0 & 3^k\end{pmatrix}$.

2.4.2. Calculer les produits matriciels PD et AP. Que peut-on en déduire vis-à-vis de la matrice A ?

2.4.3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A^k = PD^kP^{-1}$. *Ceci fourni une troisième méthode pour le calcul des puissances de A.*

3ème Partie
Application à l'étude d'un système de suites simultanément récurrentes

On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0$, $y_0 = z_0 = 1$ et les relations de récurrence : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n + 4y_n + z_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n + y_n + 4z_n) \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$.

3.1. Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = \frac{1}{7}AX_n$.

3.2. En déduire, à l'aide d'une récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = \frac{1}{7^n}A^nX_0$.

3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le produit matriciel AX_0, puis en utilisant l'expression de la matrice A^n, obtenue à la question **1.2.2.** de la première partie, déterminer les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n.

3.4. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite.

Problème 2

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si X est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on lui associe la fonction numérique de la variable réelle

$$M_X : t \longmapsto E(e^{tX})$$

où, pour tout réel u, $E(e^{uX})$ désigne l'espérance, lorsqu'elle existe, de la variable aléatoire e^{uX}.

On rappelle le théorème de transfert à une variable suivant :

« *Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète (caractérisée par les (x_k, p_k)) et si $Y = g(X)$, alors sous réserve de convergence absolue on a :* $E(Y) = \sum_k g(x_k)p_k$. »

1ère Partie
Exemples de calculs de M_X et quelques propriétés

1.1. Expression et quelques propriétés de M_X dans le cas d'une loi discrète finie

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_r$ avec les probabilités non nulles respectives $p_1, \ldots, p_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$; c'est-à-dire que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, avec $r \geqslant 1$, et $P(X = x_k) = p_k > 0$, pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$.

1.1.1. Montrer que la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{r} p_k e^{x_k t}.$$

1.1.2. Justifier que la fonction M_X est strictement positive et préciser la valeur de $M_X(0)$.

1.1.3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, la fonction M_X est $k-$fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$M_X^{(k)}(0) = E(X^k).$$

1.2. Deux premiers exemples de calcul de M_X

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1.2.1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Montrer que M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = 1 + p(e^t - 1).$$

1.2.2. On suppose que X suit une loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Montrer que M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = \big(1 + p(e^t - 1)\big)^n.$$

1.3. Calcul de M_X dans le cas de deux lois discrètes infinies usuelles

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. on note ln la fonction logarithme népérien.

1.3.1. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que M_X est définie sur l'intervalle ouvert $]-\infty, -\ln(1-p)[$ et que

$$\forall t < -\ln(1-p), \quad M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}.$$

1.3.2. On suppose que X suit une loi Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

1.4. Cas d'une somme de variables aléatoires

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Soient X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi que la variable aléatoire X. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1.4.1. On suppose ici que $n = 2$ et que $u \in \mathbb{R}$ est un élément du domaine de définition de la fonction M_X. Montrer que $M_{S_2}(u)$ existe et que $M_{S_2}(u) = \big(M_X(u)\big)^2$. On justifiera la réponse en citant le résultat utilisé.

1.4.2. Montrer plus généralement que si $u \in \mathbb{R}$ est un élément du domaine de définition de la fonction M_X, alors $M_{S_n}(u)$ existe et on a $M_{S_n}(u) = \big(M_X(u)\big)^n$.

1.5. Une inégalité

On reprend les notations de la section **1.4.** précédente.

1.5.1. Soit a un réel et $u \in]0, +\infty[$. Comparer les événements $\left\{\omega \in \Omega\,;\ \frac{S_n(\omega)}{n} \geqslant a\right\}$ et $\left\{\omega \in \Omega\,;\ e^{uS_n(\omega)} \geqslant e^{nau}\right\}$.

1.5.2. Montrer que si $u \in]0, +\infty[$ est un élément du domaine de définition de M_X, alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) = P\left(e^{uS_n} \geqslant e^{nau}\right) \leqslant \left(e^{-au} M_X(u)\right)^n.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

2ème Partie
Quelques résultats utiles d'analyse

2.1. Une inégalité de convexité

2.1.1. Montrer que la fonction $x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.1.2. En déduire que si $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$ alors,

$$e^{xt} \leqslant \frac{1+x}{2}\, e^t + \frac{1-x}{2}\, e^{-t}.$$

2.2. Une autre inégalité utile

On rappelle que pour tout réel x, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2.2.1. Justifier que pour tout réel t, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ est convergente de somme $e^{\frac{t^2}{2}}$.

2.2.2. Montrer que pour tout réel t, $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

2.2.3. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^k k! \leqslant (2k)!$.

2.2.4. En déduire que pour tout réel t, $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

3ème Partie
Variables aléatoires sous-gaussiennes

Soit X une variable aléatoire discrete définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\alpha > 0$; on dit que X est α-sous-gaussienne si la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et si de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X(t) = E(e^{tX}) \leqslant e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2}}.$$

4.1. Un exemple

On suppose ici que la variable aléatoire X est telle que $X(\Omega) = \{-1,1\}$ et que $P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$.

4.1.1. Montrer que la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $M_X(t)$ pour tout réel t.

4.1.2. Montrer que M_X est 1-sous-gaussienne. *On pourra utiliser la question* **2.2.4.** *de la deuxième partie.*

4.1.3. On considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et des variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi que la variable aléatoire X.

(i) Montrer que pour tout réel t et tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire $e^{t(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n)}$ admet une espérance et que

$$E(e^{t(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)}) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{-ta_k} + e^{ta_k}}{2} \right).$$

(ii) En déduire que si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, alors la variable aléatoire $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ est α-sous-gaussienne, avec $\alpha = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

4.2. On revient au cas général et on suppose ici que la variable aléatoire X est centrée, c'est à dire que $E(X) = 0$.

4.2.1. Montrer que si X est bornée par 1, alors elle est 1-sous-gaussienne. *On pourra utiliser* **2.1.2.** *et* **2.2.4.**

4.2.2. En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$, alors elle est α-sous-gaussienne.

4.3. Une inégalité

Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne, avec $\alpha > 0$, et soit $\lambda > 0$.

4.3.1. Montrer que, pour tout $t > 0$, $P(X \geqslant \lambda) = P(e^{tX} \geqslant e^{t\lambda})$.

4.3.2. Montrer que, pour tout $t > 0$, $P(X \geqslant \lambda) \leqslant e^{\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda}$.

4.3.3. En déduire que $P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}}$. *On pourra étudier et minimiser la fonction $x \longmapsto \frac{\alpha^2}{2}x^2 - \lambda x$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.*

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme d'ECT chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Suites réelles
- Variables aléatoires finies et lois usuelles
- Matrices carrées : inverse et puissances
- Sommes finies et séries numériques
- Variables aléatoires discrètes infinies
- Introduction au langage Python : variables, types, instructions et fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnaem/ect