Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2005, filière MP

Physique I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- 1re partie, 1.1 : nature de la trajectoire et application
- 1re partie, 1.2 : stabilité de la trajectoire électronique
- 2e partie, 2.1 : théorème de Larmor
- 2e partie, 2.2 : oscillateur harmonique spatial
- 2e partie, 2.3 : changements de fréquence dus à la rotation de Larmor
- 2e partie, 2.4 : conséquences sur les raies d'émission de l'atome

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Cette copie est une ressaisie du sujet par un enseignant, pas le document officiel : elle peut contenir des fautes de frappe. En cas de doute, c'est le sujet officiel qui fait foi. Elle sera remplacée dès que nous aurons une copie officielle.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2005/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Filière MP

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 6 pages au format A 4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

Champ magnétique et propriétés de la matière

On se propose dans ce problème d'étudier, à travers deux exemples différents, comment un champ magnétostatique externe peut agir sur certaines propriétés de la matière. C'est ainsi que le problème aborde d'abord l'action d'un champ magnétique sur les charges d'un faisceau électronique. Ensuite, on s'intéresse à la modification du spectre d'émission d'un atome sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Toutes les questions du problème seront abordées dans le cadre de la théorie classique non relativiste et non quantique. Dans toute cette étude, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen.

Données utiles

. Charge élémentaire : $e = 1,6\ 10^{-19} C$.
. Masse de l'électron : $m_e = 9,1\ 10^{-31} kg$.
. Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} H.m^{-1}$.
. Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3\ 10^8 m.s^{-1}$.

$1^{ère}$ partie : Faisceau électronique

Un électron, d'un faisceau électronique, de masse m_e et de charge $q = -e$ est animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0$. À l'instant pris comme origine des temps $t = 0$, il pénètre une région de l'espace où règne un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On suppose que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ n'a pas de composante **non nulle** suivant la direction du champ magnétostatique $\vec{B}$. On négligera le poids de l'électron.

1.1 Nature de la trajectoire et application

1.1.1 Écrire le théorème de la résultante cinétique pour l'électron considéré.

1.1.2 En projetant l'équation obtenue, d'abord sur la direction du champ magnétique, puis ensuite sur le vecteur vitesse instantanée, montrer que la trajectoire de l'électron est plane et que le module de la vitesse de l'électron reste constant au cours du mouvement.

1.1.3 Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron ? La dessiner en l'orientant relativement au champ magnétique $\vec{B}$

1.1.4 Montrer que la période T du mouvement de l'électron s'exprime simplement en fonction de la pulsation cyclotron définie par :

$$\omega_c = \frac{qB}{m_e} \qquad (1)$$

1.1.5 Calculer numériquement T dans le cas d'un électron plongé dans un champ magnétique $B = 5\ 10^{-3} T$.

1.1.6 L'électron, initialement émis avec une vitesse négligeable, est accéléré sous une différence de potentiel $\Delta V = 10\ kV$. Il décrit une trajectoire circulaire de diamètre $D = 13,4\ cm$ dans la région de l'espace où règne un champ magnétostatique de module $B = 5\ 10^{-3} T$. Exprimer la charge spécifique de l'électron donnée par le rapport e/m_e en fonction de B, D et ΔV. Commenter le résultat numérique obtenu et préciser les éventuelles sources d'incertitude.

1.1.7 Comment mesure-t-on la charge électrique de l'électron ?

1.1.8 Vérifier à l'aide d'un calcul numérique, que le poids de l'électron est effectivement négligeable devant la force de LORENTZ.

1.1.9 Sans faire de calcul supplémentaire, dessiner la trajectoire de l'électron dans la région où règne le champ magnétostatique $\vec{B}$ lorsque la vitesse initiale $\vec{v}_0$ possède une composante **non nulle** suivant l'axe Oz. Quelle est sa nature ?

1.2 Stabilité de la trajectoire électronique

On se propose d'étudier la stabilité de la trajectoire électronique circulaire initiale décrite dans le plan $z = 0$. Pour cela on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz et on pose :

$$\begin{cases} r(t) = R + \epsilon_r(t) \\ \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta(t) \end{cases} \qquad (2)$$

où $\omega_c = qB/m_e$. Les trois grandeurs algébriques $\epsilon_r(t)$, $\dot{\epsilon}_\theta(t)$ et $z(t)$ seront considérées comme des infiniment petits de même ordre et nuls à $t = 0$. On rappelle l'expression de l'accélération et en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \qquad (2)$$

1.2.1 Écrire le théorème de la résultante cinétique en projection sur les vecteurs de base $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ des coordonnées cylindriques.

1.2.2 En se limitant aux termes d'ordre un, montrer que la projection sur $\vec{u}_\theta$ conduit à une relation simple entre $\epsilon_r(t)$ et $\dot{\epsilon}_\theta(t)$.

1.2.3 Montrer alors que la projection sur $\vec{u}_r$ permet d'obtenir une équation différentielle de second ordre vérifiée par $\epsilon_r(t)$.

1.2.4 Donner la solution $\epsilon_r(t)$ de l'équation différentielle précédente en tenant compte des conditions initiales et en déduire $\dot{\epsilon}_\theta(t)$. Le mouvement radiale suivant $\vec{u}_r$ et le mouvement orthoradial suivant $\vec{u}_\theta$ sont-ils stables ?

1.2.5 Qu'en est-il de la stabilité du mouvement axial suivant Oz ?

$2^{ème}$ partie : Effet ZEEMAN

2.1 Théorème de Larmor

Considérons un électron atomique de masse m_e et de charge $q = -e$ en mouvement orbital autour du noyau supposé fixe dans le référentiel du laboratoire R. L'électron est soumis de la part de son entourage à l'action d'un champ électrostatique $\vec{E}$.

2.1.1 Exprimer l'accélération $\vec{a}_0$ d'un tel électron relativement au référentiel R du laboratoire en fonction de m_e, q et $\vec{E}$.

2.1.2 L'électron est en plus soumis à l'action d'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Exprimer son accélération $\vec{a}$ en fonction de m_e, q, $\vec{E}$, $\vec{B}$ et de la vitesse $\vec{v}$ de l'électron par rapport au référentiel du laboratoire.

2.1.3 On considère un référentiel R' en rotation uniforme par rapport à R. On désigne par $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de R' par rapport à R et on note $\vec{a}\,'$, (resp. $\vec{v}\,'$) l'accélération (resp. la vitesse) de l'électron relativement au référentiel R'. On rappelle les formules de composition des vitesses et des accélérations :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{r} & (4) \\ \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' & (5) \end{cases}$$

2.1.3.1 En utilisant les résultats précédents, exprimer $\vec{a}\,'$, en fonction de m_e, q, $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{v}\,'$ et $\vec{r}$.

2.1.3.2 Montrer que par un choix judicieux de $\vec{\Omega}$, l'accélération $\vec{a}\,'$, de l'électron relativement au référentiel R' est donnée par :

$$m_e\vec{a}\,' = q\vec{E} + \frac{q^2}{4m_e}\vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}) \qquad (6)$$

Un tel choix définit le référentiel de LARMOR relatif au champ magnétostatique $\vec{B}$.

On se propose d'examiner l'ordre de grandeur des deux termes qui constituent le second membre de (6). Pour cela on considère le cas simple de l'atome d'hydrogène.

2.1.3.3 Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par le noyau de l'atome d'hydrogène.

2.1.3.4 En déduire que le rapport ϱ des deux termes du second membre de (6) peut être majoré par :

$$\varrho_{max} = \frac{\pi}{\mu_0 c_0^2} \quad \frac{B^2 r^3}{m_e} \qquad (7)$$

2.1.3.5 Compte tenu des ordres de grandeurs des dimensions atomiques ($r \approx 10^{-10} m$) et des champs magnétostatiques qui peuvent être créés au laboratoire ($B \approx 1T$), vérifier à l'aide d'un calcul numérique, que $\varrho_{max} \ll 1$. Montrer alors que :

$$m_e\vec{a}\,' \approx q\vec{E} \qquad (8)$$

2.1.4 En déduire le théorème de LARMOR : *le mouvement électronique dans le référentiel de LARMOR aprés établissement du champ magnétostatique $\vec{B}$, est identique au mouvement existant normalement en l'absence de champ magnétique dans le référentiel du laboratoire par rapport auquel le référentiel de LARMOR est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$ donné par :*

$$\vec{\Omega} = -\frac{q\ \vec{B}}{2\ m_e} \qquad (9)$$

2.2 Oscillateur harmonique spatial

Dans le cadre de la théorie classique de l'émission de la lumière par les atomes, l'électron est élastiquement lié au noyau à l'aide de la seule force de rappel $\vec{f_r}$ donnée par :

$$\vec{f_r} = -m_e\omega_0^2\vec{r} \qquad (10)$$

2.2.1 Montrer que, dans le cas général, le mouvement est plan. Peut-il être rectiligne ? Dans quel cas ? Par la suite on considérera le cas général.

2.2.2 Dans cette question, on se place dans le plan de la trajectoire. On note r et θ les coordonnées polaires de l'électron dans ce plan et $\vec{u}$ le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire.

2.2.2.1 Exprimer la projection σ sur $\vec{u}$ du moment cinétique de l'électron en fonction de m_e, r et $\dot{\theta}$.

2.2.2.2 Montrer que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + U_{eff}(r) \tag{11}$$

et exprimer $U_{eff}(r)$ en fonction de m_e, ω_0, σ et r.

2.2.2.3 Représenter graphiquement $U_{eff}(r)$ et en déduire la nature de la trajectoire de l'électron. On montrera auparavant que l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

2.2.2.4 La trajectoire peut-elle être circulaire ? Quel est son rayon dans ce cas ? Quelle est l'énergie mécanique correspondante ?

2.2.3 Écrire le théorème de la résultante cinétique et en déduire l'expression du vecteur position $\vec{r}(t)$ de l'électron en fonction de $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$, ω_0 et t.

2.2.4 On s'intéresse au mouvement de l'électron le long de l'axe Oz.

2.2.4.1 Donner l'exf"ression de $z(t)$ en fonction de $z(0)$, $\dot{z}(0)$, ω_0 et t.

2.2.4.2 Montrer que la représentation complexe de la composante suivant l'axe Oz du déplacement de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\vec{z}}(t) = Z \exp -i(\omega_0 t + \zeta)\vec{u}_z \tag{12}$$

et donner les expressions du module Z et de l'argument ζ en fonction de $z(0)$, $\dot{z}(0)$ et ω_0.

2.2.5 De même, la représentation complexe de la composante du déplacement de l'électron le long de l'axe Ox peut s'écrire :

$$\underline{\vec{x}}(t) = A \exp -i(\omega_0 t + \alpha)\vec{u}_x \tag{13}$$

2.2.5.1 Montrer que l'on peut toujours écrire :

$$\underline{\vec{x}}(t) = A'(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) + A'(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \tag{14}$$

et exprimer A' en fonction de A.

2.2.5.2 En déduire que la composante suivant Ox du mouvement de l'électron peut se décomposer en un mouvement circulaire dans le sens direct(ou circulaire gauche) et un mouvement circulaire dans le sens rétrograde (ou circulaire droit).

2.2.6 Montrer de même que la composante suivant Oy du mouvement de l'électron peut se décomposer en un mouvement circulaire gauche et un mouvement circulaire droit. On prendra :

$$\underline{\vec{y}}(t) = B \exp -i(\omega_0 t + \beta)\vec{u}_y \tag{15}$$

2.2.7 Plus généralement, considérons le mouvement de l'électron dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz décrit par :

$$\underline{\vec{r}}_\perp(t) = \underline{\vec{x}}(t) + \underline{\vec{y}}(t) \tag{16}$$

2.2.7.1 Montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{\vec{x}}(t) = \underline{R}_g(\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t + \underline{R}_d(\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t \tag{17}$$

et donner les expressions de $\underline{R}_g$ et $\underline{R}_d$ en fonction de A, B, α et β.

2.2.7.2 Quelle est ainsi la nature du mouvement le plus général dans le plan xOy ?

2.3 Changements de fréquence dus à la rotation de Larmor

On se propose d'étudier l'influence d'un champ magnétostatique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme sur le mouvement de l'électron atomique. L'étude précédente (2.2.) a montré que le mouvement le plus général d'un tel électron peut être décomposé en :

- un mouvement rectiligne sinusoïdal le long de l'axe Oz de pulsation ω_0 ;

- deux mouvements circulaires l'un gauche, l'autre droit dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz de même pulsation ω_0.

Nous allons donc étudier l'influence du champ magnétostatique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ sur chacune des trois composantes de ce mouvement.

2.3.1 Écrire le théorème de la résultante cinétique relativement au référentiel du laboratoire, pour l'électron atomique soumis à l'action du champ magnétostatique $\vec{B}$.

2.3.2 Montrer que la composante suivant Oz du mouvement de l'électron n'est pas modifiée par l'application du champ magnétostatique.

2.3.3 Donner les projections du théorème de la résultante cinétique selon Ox puis selon Oy.

2.3.4 Considérons maintenant la composante du mouvement circulaire dans le sens direct ou gauche. D'après le théorème de LARMOR, en présence du champ magnétostatique, la trajectoire reste circulaire. Elle est décrite à la pulsation ω_+ dans le sens direct.

2.3.4.1 Donner sans démonstration les expressions de x(t) et y(t) pour un tel mouvement. Exprimer alors $\dot{y}(t)$ en fonction de $x(t)$ et ω_+.

2.3.4.2 Montrer que ω_+ est solution de l'équation :

$$\omega_+^2 - \frac{eB}{m_e}\omega_+ - \omega_0^2 = 0 \tag{18}$$

2.3.4.3 Donner un ordre de grandeur de ω_0 dans le domaine visible ainsi que du rapport eB/m_e pour un champ fort ($B \approx 1\ T$). Commenter.

2.3.4.4 En déduire l'expression approchée du décalage en fréquence $\Delta\nu_+ = (\omega_+ - \omega_0)/2\pi$.

Le résultat obtenu est-il en accord avec le théorème de LARMOR ? Expliquer.

2.3.5 Reprendre l'étude précédente pour la composante circulaire rétrograde de pulsation modifiée ω_- et déterminer l'expression approchée du décalage en fréquence correspondant $\Delta\nu_- = (\omega_- - \omega_0)/2\pi$. Comparer $\Delta\nu_+$ et $\Delta\nu_-$. Expliquer comment le résultat obtenu est-il en accord avec le théorème de LARMOR.

2.4 Conséquences sur les raies d'émission de l'atome

Selon la théorie classique du rayonnement ; lorsque l'électron oscille à la pulsation ω, l'atome acquiert un moment dipolaire électrique instantané $\vec{p}(t) = -e\vec{r}(t)$. Il rayonne alors à grande distance une onde électromagnétique $(\vec{e}, \vec{b})$ donnée, au point M par :

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{b}} = \frac{\mu_0}{4\pi||\vec{R}||^2}\vec{R}\ \frac{\omega^2}{c_0} \times \underline{\vec{p}}(t - ||\vec{R}||/c_0) \\ \\ \underline{\overrightarrow{e}} = -c_0^2\frac{\vec{k}}{\omega} \times \underline{\overrightarrow{b}} \end{cases} \tag{19}$$

où $\vec{k} = \frac{\omega^2}{c_0}\frac{\vec{R}}{||\vec{R}||}$ et $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$; l'origine O étant prise au centre de l'atome.

2.4.1 On s'intéresse tout d'abord au mouvement de l'électron le long de l'axe Oz en l'absence de tout champ magnétostatique extérieur.

2.4.1.1 Trouver l'expression de $\underline{\overrightarrow{e}}$ en coordonnées sphériques d'axe Oz. On prendra $\underline{p}(t) = p_0 \exp -i\omega t$.

2.4.1.2 Montrer que dans une direction d'observation Δ quelconque, le champ électrique rayonné est proportionnel à la projection de $\vec{p}$ sur le plan perpendiculaire à Δ appelé plan d'observation dans la suite. Quelle est la polarisation d'une telle onde ?

2.4.1.3 Que vaut le champ électromagnétique rayonné par un tel dipôle dans la direction de son axe ? Dans une direction perpendiculaire à son axe ?

2.4.2 Montrer que, plus généralement, la polarisation du champ électrique rayonné à grande distance par un dipôle oscillant quelconque, c'est-a-dire pas nécessairement rectiligne le long de Oz, est celle du vecteur projection de son moment dipolaire instantané $\vec{p}$ sur le plan d'observation.

2.4.3 L'atome est soumis à l'action d'un champ magnétostatique $\vec{B}$ uniforme. On s'intéresse à l'émission de lumière dans une direction Δ perpendiculaire à $\vec{B}$ ou, ce qui revient au même, dans un plan d'observation parallèle à $\vec{B}$.

2.4.3.1 Montrer que, pour une raie donnée de fréquence initiale $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ (en l'absence de $\vec{B}$), la lumière émise est constituée de trois radiations dont on donnera les fréquences.

2.4.3.2 Quelle est l'état et la direction de polarisation de chacune de ses trois raies ? Proposer un montage pratique pour vérifier l'état de polarisation de ces raies.

2.4.3.3 Quelles sont les intensités relatives de ces trois raies ?

2.4.4 On s'intéresse à présent à l'émission de lumière, sous le même champ magnétostatique, dans une direction Δ parallèle à $\vec{B}$ ou, ce qui revient au même, dans un plan d'observation perpendiculaire à $\vec{B}$.

2.4.4.1 De combien de raies la lumière émise est-elle constituée ?

2.4.4.2 Déterminer l'état de polarisation et l'intensité relative des raies observées.

2.4.4.3 Proposer un montage pratique pour vérifier l'état de polarisation des ces raies.

2.4.5 On plonge une lampe à vapeur de cadmium dans un champ magnétostatique uniforme et on sélectionne la radiation rouge de longueur d'onde $\lambda_0 = 643,8\ nm$ à l'aide d'un filtre interférentiel adéquat de bande passante de largeur $10\ nm$. Dans une direction d'observation donnée, une telle radiation se décompose par effet ZEEMAN en trois raies de longueurs d'onde voisines λ_0, $\lambda_0+\Delta\lambda$ et $\lambda_0-\Delta\lambda$. La figure 1 donne les variations de $\Delta\lambda$ en fonction du champ magnétostatique appliqué.

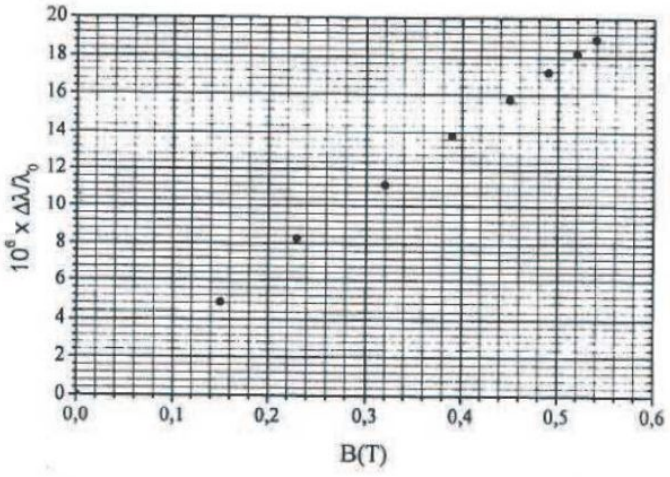


Fig 1 : Variation de la longueur d'onde avec le champ magnétique.

2.4.5.1 Exprimer $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ en fonction de B, λ_0, e, m_e et c_0.

2.4.5.2 En déduire la valeur du rapport e/m.

2.4.5.3 Comment pourrait-on mesurer $\Delta\lambda$ dans la pratique ?

fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Nombres complexes et trigonométrie
- Fonctions usuelles et lecture des graphes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp