Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2005, filière MP

Physique II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- 1re partie, 1.1 : étude de l'équilibre thermique initial
- 1re partie, 1.2 : ordres de grandeurs
- 1re partie, 1.3 : résolution et conditions aux limites
- 2e partie : détection et analyse du signal

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2005/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 7 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Méthode photothermique de mesure d'une température

Le problème traite de la mesure de la température d'un corps. Dans certaines situations, la mesure d'une température à l'aide d'un thermomètre de contact est impossible (températures élevées, objets éloignés, ...). On peut alors mettre en œuvre des méthodes optiques comme le *pyromètre optique* ou la *méthode photothermique* que nous étudions dans ce problème.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La méthode photothermique de mesure de la température T_0 d'un corps solide *opaque* consiste à perturber localement le champ des températures $T(\overrightarrow{r},t)$ de ce corps par un apport d'énergie lumineuse variable $\varphi_{\lambda_0}(t) = \varphi_{\lambda_0}F(t)$. Cette énergie lumineuse est fournie par un faisceau laser cylindrique monochromatique de longueur d'onde λ_0 dans le vide et de section transversale ΔS. La variation temporelle $F(t)$ est obtenue à l'aide d'un *hacheur* optique.

Le champ des températures perturbé peut s'écrire en présence du flux laser modulé sous la forme :

$$T(\overrightarrow{r},t) = T_0 + \Delta T(\overrightarrow{r},t)$$

avec $\Delta T \ll T_0$.

En présence du faisceau laser, le corps émet localement un rayonnement thermique de température $T(\overrightarrow{r},t)$ qui est analysé par un *détecteur* photométrique.

On considère le dispositif expérimental dont le schéma de principe est représenté figure 1. L'échantillon (Σ) dont on veut mesurer la température T_0 est un solide *opaque*, cylindrique de section circulaire ΔS et d'épaisseur $e = 1\,\text{cm}$. La paroi latérale de l'échantillon est supposée parfaitement calorifugée par un corps athermane. La face supérieure (FS) de l'échantillon est à l'air libre de température T_a.

L'air ainsi que tous les milieux traversés par les divers flux lumineux sont supposés *parfaitement transparents*. Tous les instruments de mesure sont supposés à la température constante T_a. On appelle h, supposé constant, le coefficient de transmission thermique de surface entre (FS) et l'air immobile à grande distance de (FS). La face inférieure (FI) de l'échantillon est en contact thermique parfait avec un thermostat de température constante T_0.

Du fait de l'éclairage ambiant, le solide est soumis en permanence à un flux surfacique lumineux *parasite* noté φ_{pa} qui apporte au corps une très faible énergie thermique.

Les propriétés radiatives de (Σ) sont modélisées par celles du *corps noir*.

On note c la chaleur spécifique du solide, λ sa conductivité thermique et ρ sa masse volumique. Ces grandeurs seront supposées *constantes*.

1ère partie

Modélisation et mise en équation

1.1. Étude de l'équilibre thermique initial

On considère tout d'abord la situation initiale où le solide n'est pas éclairé par le faisceau laser. Dans ces conditions le corps est en équilibre thermique à la température T_0 constante.

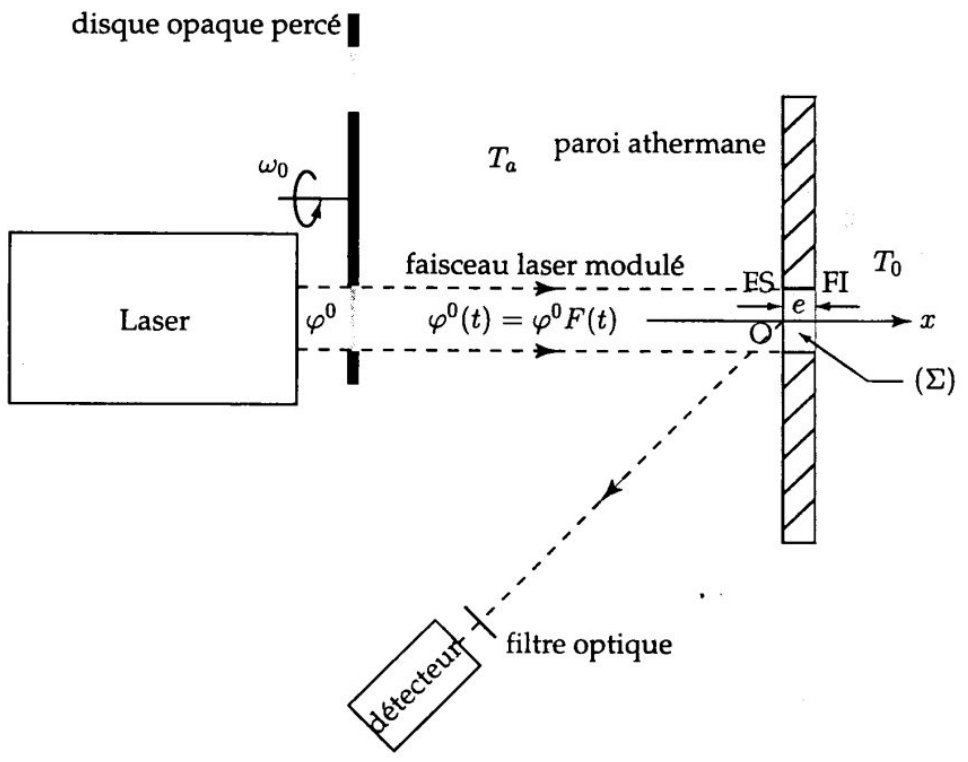


Figure 1: Schéma de principe du dispositif expérimental. L'origine de l'axe Ox est choisi sur la face (FS).

1.1.1. Corps noir

1.1.1.1. Rappeler la définition du *corps noir*.

1.1.1.2. Donner l'expression du flux hémisphérique surfacique total φ_e^{CN} émis par le corps noir de température thermodynamique T. Comment appelle-t-on cette loi ?

1.1.1.3. Quelles sont les conditions d'application de cette loi ?

1.1.2. Équilibre thermique

1.1.2.1. Rappeler l'expression de l'énergie interne massique u d'un solide idéal en fonction de la chaleur spécifique c constante, de la température thermodynamique T et d'une éventuelle constante u_0.

1.1.2.2. La température initiale T_0 du solide étant supposée uniforme, montrer à l'aide d'un bilan d'énergie détaillé que T_0 vérifie l'équation (1) :

$$\sigma\left(T_0^4 - T_a^4\right) + h\left(T_0 - T_a\right) - \varphi_{\mathrm{pa}} = 0 \tag{1}$$

avec σ la constante de STEFAN.

1.1.2.3. Déduire de la faible valeur de φ_{pa} que la température T_0 du corps est très légèrement supérieure à la température ambiante T_a.

1.1.2.4. **Linéarisation :** En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que l'on peut linéariser l'équation (1) sous la forme :

$$4\,\sigma\,T_a^3(T_0 - T_a) + h\left(T_0 - T_a\right) - \varphi_{\mathrm{pa}} = 0 \tag{2}$$

1.2. Ordres de grandeurs

1.2.1. Bilan d'énergie en régime variable

On considère le solide (Σ) de la figure 1. On suppose que sa température est variable et peut s'écrire sous la forme $T = T(\vec{r}, t)$, du fait d'un apport d'énergie thermique *surfacique variable*, à l'interface entre (FS) et l'air libre, en $x = 0$.

1.2.1.1. En examinant les symétries et les conditions aux limites radiales du problème, montrer que le champ des températures $T(\vec{r}, t)$ ne peut dépendre que du temps t et d'une seule variable spatiale que l'on précisera.

1.2.1.2. Établir à partir d'un bilan détaillé d'énergie que l'équation vérifiée par la température T au sein de l'échantillon est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3}$$

avec a la *diffusivité thermique* du solide, dont on donnera d'une part l'expression en fonction de ρ, λ et c et d'autre part l'unité dans le système international SI.

1.2.1.3. On note δt la durée de l'expérience pendant laquelle on impose l'apport d'énergie thermique à l'interface entre (FS) et l'air libre. En écrivant à partir de (3) une équation aux dimensions, donner en fonction de a et δt, l'expression de la longueur L_q de pénétration de l'énergie thermique par diffusion dans le solide.

1.2.1.4. On donne $a = 10^{-6}$ SI et $\delta t = 0,1$ s. En déduire la valeur numérique de la longueur de pénétration L_q de l'énergie thermique dans l'échantillon.

1.2.1.5. En comparant la valeur numérique de L_q à l'épaisseur $e = 1$ cm de l'échantillon, montrer que l'on a $T(x \gg L_q, t) = T_0$ à chaque instant t de l'expérience.

1.2.2. Effet d'un flux lumineux incident variable

On suppose maintenant que l'apport d'énergie thermique au niveau de la face supérieure (FS) de l'échantillon est due au faisceau laser cylindrique qui illumine exactement la face (FS).

Le faisceau laser est modulé dans le temps à l'aide d'un hacheur optique constitué d'un disque opaque percé de plusieurs orifices circulaires transparents de même section que le faisceau laser. Ce disque mis en rotation uniforme à vitesse angulaire constante intercepte périodiquement le faisceau (figure 1).

L'expression de la densité surfacique de puissance lumineuse transportée par le faisceau laser modulé est donnée par :

$$\varphi^0(t) = \varphi^0 F(t) \tag{4}$$

On suppose que l'intensité lumineuse du faisceau laser est uniforme sur sa section.

Seule la contribution variable du flux étant détectée ultérieurement, on se limite à la pulsation fondamentale en écrivant la fonction modulante $F(t)$ sous la forme :

$$F(t) = \cos \omega_0 t \tag{5}$$

1.2.2.1. La puissance lumineuse du laser utilisé dans cette expérience est $P = 2$ W pour un rayon du faisceau laser qui vaut $r = 5$ mm. En déduire l'expression et la valeur numérique de φ^0. Commenter cette valeur.

1.2.2.2. Représenter graphiquement l'allure de $\varphi^0(t)$ en fonction du temps t.

Lors de son interaction avec l'échantillon (Σ), la lumière du laser est *absorbée* par l'échantillon selon

une loi exponentielle. La densité *surfacique* de puissance lumineuse absorbée par la matière est alors donnée par :

$$\varphi_{\lambda_0}(x,t) = \varphi^0 F(t) \exp\left(-\frac{x}{L_{\lambda_0}}\right) \tag{6}$$

avec φ^0 et L_{λ_0} des constantes positives. On donne $L_{\lambda_0} = 10^{-7}$ m.

1.2.2.3. Quel est le sens physique de la constante L_{λ_0} ?

1.2.2.4. Comparer L_{λ_0} à l'épaisseur e de l'échantillon (Σ). En déduire une représentation graphique *pertinente* de la densité surfacique de puissance lumineuse $\varphi_{\lambda_0}(x,t)$ absorbée par (Σ) pour $x \in [0,e]$.

1.2.2.5. Déduire des questions précédentes que l'équation (3) est encore valable lorsque l'échantillon (Σ) est illuminé par le faisceau laser modulé.

1.3. Résolution et conditions aux limites

On cherche à résoudre l'équation (3) qui donne le champ des températures $T(x,t)$ au sein de (Σ) lorsque le solide est éclairé par le faisceau laser modulé. Le faible flux parasite φ_{pa}, la température ambiante T_a et la température T_0 du thermostat sont supposés avoir les mêmes valeurs que dans la situation statique de la question 1.1.

On pose la température absolue complexe $\underline{T}(x,t)$ sous la forme :

$$\underline{T}(x,t) = \underline{\theta}(x) \exp \mathrm{i}\omega_0 t + T_0 \tag{7}$$

avec $\underline{\theta}(x)$ une fonction a priori complexe de la position x uniquement, $\mathrm{i}^2 = -1$ et $T(x,t) = \Re[\underline{T}(x,t)]$ où $\Re$ désigne la partie réelle. On rappelle que $\sqrt{\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et que $\exp -\mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})$.

1.3.1. Équation différentielle

1.3.1.1. Déduire des relations (3) et (7) l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\underline{\theta}(x)$.

1.3.1.2. En déduire que la fonction $\underline{\theta}(x)$ est de la forme

$$\underline{\theta}(x) = \underline{A} \exp \underline{\alpha} x + \underline{B} \exp -\underline{\alpha} x$$

avec $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux constantes a priori complexes, dont on ne demande pas l'expression ici et $\underline{\alpha}$ une constante complexe que l'on exprimera en fonction de ω_0 et de a.

1.3.2. Conditions aux limites

1.3.2.1. En remarquant que la température $T(x \gg L_q, t)$ de l'échantillon est finie, simplifier l'expression de $\underline{\theta}(x)$.

1.3.2.2. **Linéarisation :** L'écart entre la température absolue $T(x,t)$ et la température ambiante T_a étant faible, montrer que la partie $\varphi_1^R = \sigma[T^4(0,t) - T_a^4]$ du flux *radiatif surfacique hémisphérique* φ^R de l'échantillon peut se mettre sous la forme linéarisée :

$$\varphi_1^R = 4\sigma T_a^3 [T(0,t) - T_a] \tag{8}$$

1.3.2.3. Donner l'expression de chacun des courants volumiques d'énergie thermique existant à l'interface $x = 0$ de l'échantillon.

1.3.2.4. En déduire une équation de continuité faisant intervenir $T(0,t)$, T_a, $(\frac{\partial T}{\partial x})_{x=0}$, $\varphi^0(t)$ et φ_{pa}.

1.3.2.5. En utilisant les résultats (2) et (8), montrer que la fonction $\underline{\theta}$ obéit à l'équation de continuité :

$$-\lambda \left(\frac{\mathrm{d}\underline{\theta}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \varphi^0 - h_e \underline{\theta}(0) \tag{9}$$

avec h_e une constante dont on donnera l'expression en fonction de h, σ et T_a.

1.3.2.6. Déduire de (9) l'expression de la constante B en fonction de φ^0, h_e, λ et α. On donne $a = 10^{-6}$ SI, $h = 20\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W.K^{-4}.m^{-2}}$, $\lambda = 10\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, $T_a = 300\,\mathrm{K}$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 500\,\mathrm{Hz}$.

1.3.2.7. Montrer par un calcul d'ordre de grandeur que $h_e \ll \lambda|\underline{\alpha}|$, où $|\underline{\alpha}|$ désigne le module de $\underline{\alpha}$. En déduire finalement que $\underline{B}$ peut s'écrire sous la forme

$$\underline{B} = \frac{\varphi^0}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{\omega_0}}\exp -\mathrm{i}\frac{\pi}{4}$$

1.3.2.8. En déduire que l'expression de $\underline{\theta}(x,t) = \underline{\theta}(x)\exp \mathrm{i}\,\omega_0\, t$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\theta}(x,t) = \frac{\varphi^0}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{\omega_0}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}x\right)\exp \mathrm{i}\left(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

1.3.2.9. Donner finalement l'expression du champ des températures $T(x,t)$ dans le solide (Σ). Discuter le sens physique de chacun des termes qui apparaissent dans $T(x,t)$. Vérifier qu'en absence de faisceau laser on retrouve la situation statique.

2ème partie

Détection et analyse du signal

Le signal $S_\lambda(t)$ délivré par le détecteur est proportionnel à la densité spectrale φ^P_λ du flux hémisphérique surfacique partant de (Σ). Un dispositif optique non représenté permet de focaliser ce flux sur le détecteur. Un filtre passe-bande optique idéal de longueur d'onde centrale λ et de bande passante $\Delta\lambda \ll \lambda$ ne laisse passer que la fraction d'énergie lumineuse dont la longueur d'onde est comprise entre $\lambda - \Delta\lambda/2$ et $\Delta\lambda + \Delta\lambda/2$ avec un coefficient de transmission $\tau(\lambda)$ égal à 1 dans cet intervalle de longueur d'onde.

2.1. Détection du signal

2.1.1. Densité spectrale

2.1.1.1. Représenter graphiquement l'allure du coefficient de transmission $\tau(\lambda)$ du filtre en fonction de λ.

On rappelle que la densité spectrale φ^P_λ du corps noir obéit à la loi de PLANCK.

2.1.1.2. Rappeler la loi de Planck du rayonnement du corps noir.

2.1.1.3. Montrer que $\frac{\partial}{\partial T}\varphi^P_\lambda$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi^P_\lambda}{\partial T} = \frac{p\exp\frac{b}{\lambda T}}{\lambda^6 T^2\left(\exp\frac{b}{\lambda T} - 1\right)^2}$$

avec p et b des constantes positives dont on donnera les expressions.

2.1.2. Signal délivré par le détecteur

On note désormais $\varphi_\lambda^P(T) = L_\lambda(T)$, avec $T = T_0 + \Delta T(0,t)$ et $\Delta T(0,t) \ll T_0$. Le signal délivré par le détecteur peut se mettre sous la forme :

$$S_\lambda(t) = D_\lambda \tau(\lambda) L_\lambda(T) \Delta\lambda \tag{10}$$

avec D_λ la détectivité spectrale du détecteur, que nous supposerons *constante* dans tout le domaine spectrale étudié.

2.1.2.1. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le signal $S_\lambda(t)$ peut s'écrire :

$$S_\lambda(t) \approx D_\lambda \left[L_\lambda(T_0) + \Delta T(0,t) \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial T} \right)_{T=T_0} \right] \Delta\lambda$$

2.1.2.2. Un dispositif de détection synchrone que nous n'étudierons pas, permet d'extraire du signal $S_\lambda(t)$ uniquement la composante variable de même pulsation ω_0 que le hacheur optique. Donner dans ces conditions l'expression du signal $S'_\lambda(t)$ délivré par le détecteur synchrone.

2.2. Analyse du signal

On utilise successivement deux filtres optiques idéaux différents, de longueurs d'onde centrales respectives λ_1 et λ_2 et d'étendues spectrales respectives $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2$. On mesure successivement les valeurs efficaces S'_{λ_1} et S'_{λ_2} des signaux respectifs $S'_{\lambda_1}(t)$ et $S'_{\lambda_2}(t)$ délivrés par le détecteur synchrone.

Montrer que le rapport des valeurs efficaces S'_{λ_1} et S'_{λ_2} permet de mesurer la température T_0 de la surface du solide (Σ).

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Nombres complexes et trigonométrie
- Fonctions usuelles et lecture des graphes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp