Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2008, filière MP

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- 1ère partie : résultats préliminaires
- 2ème partie : la propriété (H)
- 3ème partie : analyticité des applications vérifiant la propriété (H)
- 4ème partie : propriétés fondamentales des applications vérifiant la propriété (H)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2008/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2008
École Nationale de l'Industrie Minérale
ENIM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans ce problème, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme qui lui est associée, notée $||.||$; $\mathbb{C}$ est muni de sa norme standard $z \longmapsto |z|$ qui en fait un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé. On rappelle que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le disque $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| < r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

1ère Partie : Résultats préliminaires

1. On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par : $\psi(x, y) = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Vérifier que l'application ψ est une bijection continue et que ψ^{-1} est aussi continue .
   (b) Justifier que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x + iy \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et qu'il est connexe par arcs.

2. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme f et dont les coefficients a_n ne sont pas tous nuls ; on pose $p = \min\{k \in \mathbb{N}\ ;\ a_k \neq 0\}$.
   (a) Justifier qu'il existe une fonction g, somme d'une série entière à préciser, telle que pour tout complexe z de module $< R$, on ait $f(z) = z^p g(z)$. Que vaut $g(0)$?
   (b) Montrer alors qu'il existe $r \in]0, R[$ tel que, pour tout $z \in D(0, r) \setminus \{0\}$, $f(z) \neq 0$.

2ème Partie : La propriété (H)

Définition. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$; on lui associe l'application $\tilde{f} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$. On dit que f vérifie *la propriété* (**H**) si $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et

$$\forall\,(x, y) \in \mathcal{U},\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y).$$

1. (a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z$; montrer que f vérifie la propriété (**H**).
   (b) Même question avec $f : z = x + iy \longmapsto \ln|z| + i\arcsin(\frac{y}{|z|})$ définie sur l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Que vaut $e^{f(z)}$ pour $z \in \Omega$?
   (c) Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{C}[X]$ où $d \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'application $f : z \longmapsto P(z)$, définie sur $\mathbb{C}$, vérifie la propriété (**H**) et exprimer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ en fonction de P'.
   (d) L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \bar{z}$ vérifie-t-elle la propriété (**H**) ?

2. **Cas d'une fonction définie par une intégrale**

   (a) Soit v un réel ; pour quelles valeurs du complexe z la fonction $t \longmapsto e^{-zt^2+ivt}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

   Pour tout réel v, on pose $f_v(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2+ivt}\,dt,\ z \in \Omega := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

   (b) Montrer que $\tilde{f}_v$ possède, en tout point de $\mathcal{U}$, une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et l'exprimer sous forme intégrale.

   (c) Montrer soigneusement que $\tilde{f}_v$ possède, en tout point de $\mathcal{U}$, une dérivée partielle par rapport à sa première variable et l'exprimer en fonction de $\dfrac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}$.

   (d) Montrer que l'application f_v vérifie la propriété (**H**).

3. **Cas de la somme d'une série entière**

   Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; on note f l'application définie par $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,\ z \in D(0,R)$ (avec $D(0,R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$).

   (a) Soit $y_0 \in]-R, R[$; montrer soigneusement que l'application $x \longmapsto f(x+iy_0)$ est dérivable sur l'intervalle $]-\sqrt{R^2-y_0^2}, \sqrt{R^2-y_0^2}[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$) et exprimer sa dérivée sous forme de la somme d'une série. On posera $f_n(z) = a_n z^n$, $z \in D(0,R)$, $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $\tilde{f}$ possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathcal{U} = \psi^{-1}\big(D(0,R)\big)$ et exprimer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$.

   (c) Montrer que f vérifie la propriété (**H**).

4. **Quelques propriétés générales**

   Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et soient f, g deux applications définies sur Ω à valeurs complexes et vérifiant la propriété (**H**) ; on pose $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$.

   (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $\lambda f + g$ vérifie la propriété (**H**).

   (b) Montrer que le produit fg vérifie la propriété (**H**).

   (c) Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F :\ \Omega' \longmapsto \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (**H**) ; on suppose de plus que $f(\Omega) \subset \Omega'$. Montrer que l'application $F \circ f$ vérifie la propriété (**H**).

   (d) On suppose que, pour tout $z \in \Omega,\ f(z) \neq 0$; montrer que l'application $\dfrac{1}{f}$ vérifie la propriété (**H**).

   (e) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et posons $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = a + ib$.

      i. Exprimer la différentielle de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0), notée $\mathrm{d}\tilde{f}(x_0, y_0)$, à l'aide des réels a et b puis écrire la matrice jacobienne A de $\tilde{f}$ au point (x_0, y_0) dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ et la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

      ii. On suppose que $a + ib \neq 0$ et on oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique ; que peut-on dire de la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A ? à quelle condition sur a et b cet endomorphisme est-il une rotation ?

   (f) Si de plus $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, calculer le laplacien $\Delta\tilde{f}$ de $\tilde{f}$ défini par $\Delta\tilde{f} := \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}$.

3ème Partie
Analyticité des applications vérifiant la propriété (H)

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$ vérifiant la propriété (**H**).

1. Justifier que l'ensemble $\{\rho > 0 \,;\ \ D(z_0, \rho) \subset \Omega\}$ n'est pas vide.

   Si cet ensemble est majoré, on note R sa borne supérieure, sinon on pose $R = +\infty$.

2. On note φ l'application de $]0, R[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(r, \theta) = f(z_0 + re^{i\theta}) = \tilde{f}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta).$$

   Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[\times\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ en fonction de $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$. Donner une relation entre les dérivées partielles premières de φ.

3. Pour tout $r \in]0, R[$, on note φ_r l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_r(\theta) = \varphi(r, \theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$.

   (a) Justifier que φ_r est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée en fonction de $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$.

   Dans la suite, on note $\big(c_n(r)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier complexes de φ_r.

   (b) Justifier que la suite $\big(c_n(r)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Qu'en déduit-on au sujet de la convergence de la série de Fourier de la fonction φ_r ? quelle est sa somme ? on précisera les hypothèses des théorèmes utilisés.

4. Les notations étant celles de la question précédente ; on pose $h_n(r) = \dfrac{c_n(r)}{r^n},\ r \in]0, R[,\ n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Donner l'expression intégrale de $c_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que la fonction $r \longmapsto c_n(r)$ est dérivable sur $]0, R[$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale puis justifier que, pour tout $r \in]0, R[$, $c_n'(r) = \frac{n}{r}c_n(r)$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est constante sur l'intervalle $]0, R[$.

   (d) Montrer que si n est un entier naturel non nul alors la fonction h_{-n} est nulle puis en déduire que $c_{-n}(r) = 0$ pour tout $r \in]0, R[$. *On pourra justifier que la fonction $r \longmapsto c_{-n}(r)$ est bornée au voisinage de 0 à droite.*

5. Soit $n \in \mathbb{N}$; d'après ce qui précède, il existe une constante $a_n \in \mathbb{C}$ telle que $a_n = h_n(r)$ pour tout $r \in]0, R[$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est supérieur ou égal à R et que, pour tout $z \in D(z_0, R)$, $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

6. Montrer l'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente.

7. En précisant le théorème utilisé montrer que, pour tout $r \in]0, R[$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (\textit{Formule de Gutzmer}).$$

4ème Partie
Propriétés fondamentales des applications vérifiant la propriété (H)

A. Théorème de Liouville

Soit $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (**H**) ; d'après l'étude menée dans la partie précédente, en prenant $z_0 = 0$, on obtient $R = +\infty$ et il existe une unique série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence infini dont f est la somme.

1. Montrer en utilisant la formule de Gutzmer que si f est bornée, elle est constante.(*Liouville*)

2. **Application :** Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on veut montrer que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons le contraire et considérons l'application g de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, définie par $g(z) = \dfrac{1}{P(z)}$. On pose $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$, $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$.

   (a) Justifier que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_d||z|^d$ et trouver la limite de $g(z)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ puis montrer que g est bornée.

   (b) Justifier que g vérifie la propriété (H) et conclure.

B. Principe du prolongement analytique

Soient Ω un **ouvert connexe par arcs** de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (**H**). On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et $f(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, \rho)$. On veut montrer que f est nulle ; supposons le contraire et considérons $z_1 \in \Omega$ tel que $f(z_1) \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et à valeurs dans Ω telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. On pose $I = \{t \in [0,1] \ ; \ \forall\, s \in [0,t],\ f(\gamma(s)) = 0\}$.

2. Justifier que I possède une borne supérieure notée σ puis montrer que σ est > 0 et que $\sigma \in I$.

3. Justifier que $[0,\sigma] \subset I$ et que $\sigma < 1$ puis construire une suite $(t_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $]\sigma, 1[$ qui décroît vers σ et vérifiant $f(\gamma(t_k)) \neq 0$ pour tout $k \geqslant 1$. En particulier $\gamma(\sigma) \neq z_0$, pourquoi ?

4. (a) Justifier qu'il existe $r_1 > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\geqslant r_1$ tels que $\quad D(\gamma(\sigma), r_1) \subset \Omega \quad$ et $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \gamma(\sigma))^n,\ z \in D(\gamma(\sigma), r_1)$.

   (b) Déduire de la question 3. précédente que les coefficients a_n ne sont pas tous nuls et justifier qu'il existe $r \in]0, r_1[$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\}$.

5. Montrer que $\gamma\big([0,\sigma]\big) \cap D(\gamma(\sigma), r) \setminus \{\gamma(\sigma)\} \neq \emptyset$ et conclure. (*On pourra considérer la borne inférieure β de $\{t \in [0,\sigma] \ ; \ \gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$ et justifier que $\beta > 0$*).

C. Applications

1. **Principe du maximum :** Soient Ω un **ouvert connexe par arcs** de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application vérifiant la propriété (**H**). On suppose que l'application $z \longmapsto |f(z)|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$ et on considère $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$.

   (a) Montrer en utilisant la formule de Gutzmer que, pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, $f(z) = f(z_0)$.

   (b) Montrer que f est constante sur Ω tout entier.

2. **Calcul d'une intégrale**

On rappelle que, pour tout réel v, la fonction $f_v : z \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2+ivt}\, dt$, définie sur l'ouvert $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, vérifie la propriété (**H**) (question 2. de la 2ème partie).

(a) On fixe un réel $u > 0$ et on pose $\mu(v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut^2+ivt}\, dt,\ v \in \mathbb{R}$.

i. Justifier que la fonction μ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\mu'(v) = -\frac{v}{2u}\mu(v)$, pour tout $v \in \mathbb{R}$.

ii. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$; calculer la valeur de $\mu(0)$ et donner l'expression de $\mu(v)$, pour tout $v \in \mathbb{R}$, à l'aide des fonctions usuelles.

(b) On sait que l'application f définie sur Ω par $f(z) = \ln|z| + i\arcsin(\frac{y}{|z|})$, $z = x + iy \in \Omega$, vérifie la propriété (**H**) (question 1. (b) de la 2ème partie). Soit v un réel.

i. Vérifier que, pou tout $u > 0$, $f_v(u) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{f(u)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4u}}$.

ii. Justifier que l'application $z \longmapsto \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}$, définie sur Ω, vérifie la propriété (**H**).

iii. Montrer en utilisant convenablement le principe du prolongement analytique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt^2+ivt}\, dt = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{f(z)}{2}} e^{-\frac{v^2}{4z}}$ pour tout $z \in \Omega$.
(*On pourra appliquer la question 2. des préliminaires en considérant le développement en série entière, sur le disque $D(1,1)$, de la différence de ces deux fonctions).*

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Topologie des espaces vectoriels normés
- Nombres complexes et trigonométrie
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp