Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2015, filière MP

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1, partie 1 : structure de l'ensemble Sigma_A
- Problème 1, partie 2 : quelques propriétés des solutions
- Problème 1, partie 3 : comportement des solutions
- Problème 2, partie 1 : fonctions harmoniques sur le graphe Z^d
- Problème 2, partie 2 : un résultat de Liouville dans un cadre discret

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2015/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

المملكة المغربية

Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2015
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique

ENSEM

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Édition 2015

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Durée 4 heures

cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Problème 1

Étude des solutions d'une équation différentielle

Si p est un entier ≥ 2 et $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et r colonnes. Si $p = r$, $\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre p ; I_p désignera la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}.)$. Si $M \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel ≥ 2. Le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se notera $<,>$ et la norme associée sera notée $\|.\|$; il est défini par $(x,y) \mapsto < x, y >:= {}^t\, yx$.

On considère une application continue $A : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ \forall x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ < A(t)x, x >= {}^t\, xA(t)x \geq 0.$$

On note Σ_A l'ensemble des applications $F : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ deux fois dérivables et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ F''(t) = A(t)F(t). \qquad (1)$$

1ère Partie
Structure de l'ensemble Σ_A

On considère l'application $B : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ \ t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A(t) & 0 \end{pmatrix}$; B est continue puisque l'application A l'est aussi. On note alors Σ_B l'espace vectoriel réel des solutions sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle

$$x' = B(t)x. \qquad (2)$$

Si $F : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une application deux fois dérivable, on lui associe l'application $x_F : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ x_F(t) = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \end{pmatrix}.$$

1.1. Vérifier que Σ_A est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2. **Détermination de la dimension de** Σ_A

1.2.1. Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une application deux fois dérivable.
Montrer que $F \in \Sigma_A$ si, et seulement si, $x_F \in \Sigma_B$.

1.2.2. Montrer que l'application $\Phi : \Sigma_A \to \Sigma_B$, $F \mapsto x_F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

1.2.3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ_A.

1.3. Montrer que, pour tout triplet $(s,u,w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une unique application F, élément de Σ_A, telle que $F(s) = v$ et $F'(s) = w$.

2ème Partie
Quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle (l)

2.1. Soit $F \in \Sigma_A$; on lui associe l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|f'(t)\|^2$, $t \geq 0$.

2.1.1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer sa dérivée seconde.

2.1.2. En déduire que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

2.2. On conserve les hypothèses et les notations de la question 2.1. précédente ; on suppose de plus qu'il existe un couple $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq t_1 < t_2$ et $F(t_1) = F(t_2) = 0$.

2.2.1. Montrer que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $f(t) = 0$.

2.2.2. Montrer que la fonction F est nulle.

2.3. **Une famille de solutions non bornées de (1)**

Soit $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note F_v l'élément de Σ_A tel que $F_v(0) = F_v'(0) = v$. Montrer que si $v \neq 0$ alors la fonction $t \mapsto \|F_v(t)\|$ admet une limite infinie en $+\infty$.

2.4. **Des normes sur Σ_A**

Soit b un réel strictement positif.

2.4.1. Montrer que l'application $\Psi : \Sigma_A \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ F \mapsto (F(0), F(b))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

2.4.2. Montrer que l'application $\|.\|_b : F \mapsto \|f(0)\| + \|F(b)\|$ est une norme sur Σ_A.

2.4.3. Montrer également que l'application $\|.\|_{\infty,b} : F \mapsto \sup_{0 \leq t \leq b} \|F(t)\|$ est une norme sur Σ_A.

2.4.4. Justifier que les normes $\|.\|_{\infty,b}$ et $\|.\|_b$, sur Σ_A, sont équivalentes.

3ème Partie
Comportement de solutions de l'équation différentielle (1)

3.1. **Une famille de suites d'éléments de Σ_A**

Soit $a \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul. Pour tout entier $m \geq 1$, on note $g_{m,a}$ l'unique élément de Σ_A vérifiant $g_{m,a}(0) = a$ et $g_{m,a}(m) = 0$.

3.1.1. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, l'application $t \mapsto \|g_{m,a}(t)\|$ est décroissante sur le segment $[0, m]$.

3.1.2. Montrer alors que $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\Sigma_A, \|.\|_1)$.

3.1.3. Justifier que la suite $(g_{m,a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ qui converge dans $(\Sigma_A, \|.\|_1)$ vers un élément noté g_a.

3.2. **Une famille de solutions bornées de (1)**

On conserve ici les notations de la question 3.1. précédente.

3.2.1. Montrer que la suite de fonctions $(g_{\sigma(m),a})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$ vers l'application g_a.

3.2.2. Montrer que $g_a(0) = a$ et que l'application $t \mapsto \|g_a(t)\|$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3.2.3. Montrer que g_a est une solution bornée de l'équation différentielle (1).

3.3. **Comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (1)**

On conserve ici les notations des questions et des parties précédentes. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on lui associe une famille $(g_{e_1}, ..., g_{e_n})$ d'applications construites comme à la question 3.1. précédente et on note Σ_1 le sous-espace vectoriel de Σ_A engendré par cette famille d'applications.

3.3.1. Montrer que les éléments de Σ_1 sont des solutions bornées de l'équation différentielle (1).

3.3.2. Montrer que la famille $(g_{e_1}, ..., g_{e_n})$ est une base de Σ_1.

3.3.3. Pour tout $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, F_v désigne l'éléments de Σ_A vérifiant $F_v(0) = F_v'(0) = v$. Montrer que l'ensemble $\Sigma_2 := \{F_v \ ; \ v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de Σ_A, de dimension n.

3.3.4. Montrer que les sous-espaces vectoriels Σ_1 et Σ_2 sont supplémentaires dans Σ_A.

3.3.5. Montrer que $\Sigma_A \backslash \Sigma_1$ est un ouvert dense de Σ_A et que toute solution F de l'équation différentielle (1) vérifie : $\begin{cases} \text{si } F \in \Sigma_A \backslash \Sigma_1, & \text{alors } \lim_{t \to +\infty} \|F(t)\| = +\infty; \\ \text{si } F \in \Sigma_1, \text{alors} & F \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+. \end{cases}$

Problème 2

Un résultat de LIOUVILLE relatif aux fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$

Dans ce problème le nombre d est un entier naturel strictement positif. On note $\|.\|_1$ la norme définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$, pour tout $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit $V(x)$ le voisinage discret (sous entendu dans $\mathbb{Z}^d$) de x par : $V(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d \ ; \ \|y - x\|_1 = 1\}$.

Ce voisinage est l'ensemble des plus proches voisins de x, il est fini de cardinal $2d$.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{Z}^d$, on note $I(A)$l l'ensemble des $x \in A$ tels que $V(x) \subset A$ et ∂A le complémentaire dans A de $I(A)$. On remarquera que pour $A = \mathbb{Z}^d$ on a $I(A) = A$ et $\partial A = \emptyset$, et pour A fini de cardinal $< 2d$, on a $I(A) = \emptyset$ et $\partial A = A$.

On dit qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est harmonique sur $I(A)$ si, pour tout $x \in I(A)$,

$$f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in V(x)} f(y).$$

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

1ère Partie
Fonctions harmoniques sur le graphe $\mathbb{Z}^d$

Dans les trois premières questions de cette partie on prend $d = 1$.

4.1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est harmonique sur $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, quel que soit l'entier relatif k, on a $f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0$.

4.2. Montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques sut $\mathbb{Z}$ est un espace vectoriel de dimension 2, préciser une base de cet espace.

4.3. Montrer que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$, harmoniques sur $I(\mathbb{Z}^*)$, est un espace vectoriel de dimension 4, préciser une base de cet espace. On commencera par déterminer $I(\mathbb{Z}^*)$.

Dans la suite de cette partie, d est un entier strictement positif quelconque.

4.4. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, positive et harmonique sur $\mathbb{Z}^d$.

4.4.1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $l \in V(k)$, $f(l) \leq 2df(k)$.

4.4.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $l \in \mathbb{Z}^d$, $f(l) \leq (2d)^{\|l-k\|_1} f(k)$.

4.4.3. Montrer que si $k \in \mathbb{Z}^d$ et $f(k) = 0$, alors f est la fonction nulle.

4.4.4. Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, alors, pour tout $l \in \mathbb{Z}^d$, $|\ln f(l) - \ln f(k)| \leq \|l-k\|_1 \ln(2d)$.

2ème Partie
Un résultat de LTOUVILLE dans un cadre discret

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant dû à LIOUVILLE.

Si $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ est harmonique et minorée (resp. majorée) sur $\mathbb{Z}^d$, alors f est constante.

L'entier d est quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est notée $(e[1], ..., e[d])$. On a donc

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., d\}^2, \ \ e[i]_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont mutuellement indépendantes et de même loi, la loi uniforme sur l'ensemble $D_d = \{-d, -d+1, ..., -1, 1, ..., d-l, d\}$.

On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$Y_o = 0, \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ Y_{n+1} = Y_n + \text{sign}(X_n) e[|X_n|]),$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{sign}(k) = \frac{k}{|k|}$.

Noter que chaque Y_n est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ qu'on écrit $Y_n = \sum_{j=1}^{d} Y_{n,j} e[j]$; les composantes $Y_{n,j}$ de Y_n, sont des variables aléatoires à valeurs entières.

La suite Y_n est appelée *une marche aléatoire symétrique* sur $\mathbb{Z}^d$, issue de 0. On modélise ainsi l'évolution d'un point mobile sur $\mathbb{Z}^d$, qui à tout instant n choisit au hasard uniforme un des $2d$ plus proches voisins de sa position précédente Y_{n-1}.

On considère aussi une variable aléatoire U, indépendante des X_n (et donc des Y_n) qui suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ fixé.

5.1. Soit g une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant

$$\exists (a,b) \in [0, +\infty[^2, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}^d, \ \ |g(k)| < \exp(a\|k\|_1 + b).$$

5.1.1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|g(Y_n)| \leq \exp(an + b)$.

5.1.2. En utilisant le théorème de transfert, montrer que l'espérance de la variable aléatoire $g(Y_U)$ existe et établir l'inégalité

$$E(|g(Y_U)|) \leq \exp(b + \lambda(e^a - 1)).$$

5.1.3. Montrer aussi la relation $E(g(Y_U)^2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g(k)^2 P\{Y_U = k\}$, en justifiant l'existence de l'espérance et la sommabilité de la famille, mises en jeux dans les deux membres de cette égalité.

5.2. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. On rappelle un résultat vu dans la première partie : $f(k) \leq (2d)^{\|k\|_1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$.

5.2.1. Montrer que les variables aléatoires $f(Y_j)$, pour $j \in \mathbb{N}$, et $f(Y_U)$ admettent toutes un moment d'ordre 2 et prouver les relations

$$E(f(Y_U)^2) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}E(f(Y_n)^2) \;\; et \;\; E(f(Y_U)) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}E(f(Y_n)).$$

5.2.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(f(Y_n)) = f(0) = 1$ et en déduire que $E(f(Y_U)) = 1$.

5.3. On note H l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ telles que $E(f(Y_U)^2)$ existe. Montrer que H est un espace vectoriel réel et que l'application $S : (f_1, f_2) \mapsto S(f_1, f_2) = E(f_1(Y_U)f_2(Y_U))$ est un produit scalaire sur H. La norme associée est notée $\|.\|_2$.

5.4. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$ qui sont harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. Cet ensemble E est non vide (il contient la fonction constante 1) et il est inclus dans l'espace H, d'après la question 5.2. précédente.

On choisit une fonction $m \in E$ de norme $\|.\|_2$ maximale, c'est à dire $E(f(Y_U)^2) \leq E(m(Y_U)^2)$ pour tout $f \in E$. La possibilité d'un tel choix est admise et on sait, d'après la première partie, que m ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}^d$. Pour tout $i \in D_d = \{-d, -d+1, ..., -1, 1, ..., d-1, d\}$ on définit une fonction $f_i : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$ en posant

$$f_i(x) = \frac{m(x + \text{sign}(i)e[|i|])}{m(\text{sign}(i)e[|i|])}.$$

5.4.1. Montrer que, pour tout $i \in D_d$, la fonction f_i est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifier qu'elle est positive et satisfait $f_i(0) = 1$.

5.4.2. Montrer que la fonction m est une combinaison convexe des fonctions $f_i, \;\; i \in D_d$.

5.4.3. En déduire que, pour tout $i \in D_d$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $m(x) = f_i(x)$, puis montrer que m est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{Z}^d$.

5.5. On considère une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$, harmonique sur $\mathbb{Z}^d$ et vérifiant $f(0) = 1$. Montrer l'inégalité $V(f(Y_U)) \leq E(m(Y_U)^2) - 1$, puis en déduire que f est constante sur $\mathbb{Z}^d$.

5.6. Comment prouver le résultat général de LIOUVILLE ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés
- Topologie des espaces vectoriels normés
- Dérivabilité et convexité
- Suites récurrentes
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp