Concours National Commun (CNC), Maroc

# Session 2018, filière MP

## Physique II

### Ce que traite le sujet

- I. Généralités sur les rayons X
- II. Transitions électroniques et spectres de raies atomiques
- III. Application : utilisation des rayons X en imagerie médicale
- IV. Application : utilisation des rayons X en cristallographie

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2018/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

• On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

• Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.

• Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Les différentes parties du problème sont très indépendantes entre elles.

• *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Quelques aspects relatifs aux rayons X**

Le problème étudie quelques aspects relatifs aux rayons X. Ces rayonnements électromagnétiques très énergétiques ont été découverts par Röntgen en 1895.

Les rayons X sont utilisés dans des domaines très divers, par exemple : en cristallochimie, en analyse élémentaire, en imagerie médicale, dans la détection de corps étrangers, etc...

**Données :**

- Masse de l'électron : $m = 9.10^{-31} kg$
- Charge de l'électron : $q = -e = -1,6.10^{-19} C$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}$
-Vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 m.s^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6,64.10^{-34} J.s$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12} F.m^{-1}$.

# I Généralités sur les rayons X

Dans une enceinte sous vide, des électrons émis par un filament chauffé sont accélérés grâce à une haute tension et bombardent une cible métallique appelée anode, de numéro atomique $Z$. L'impact de ces électrons produit un rayonnement électromagnétique appelé rayons X.

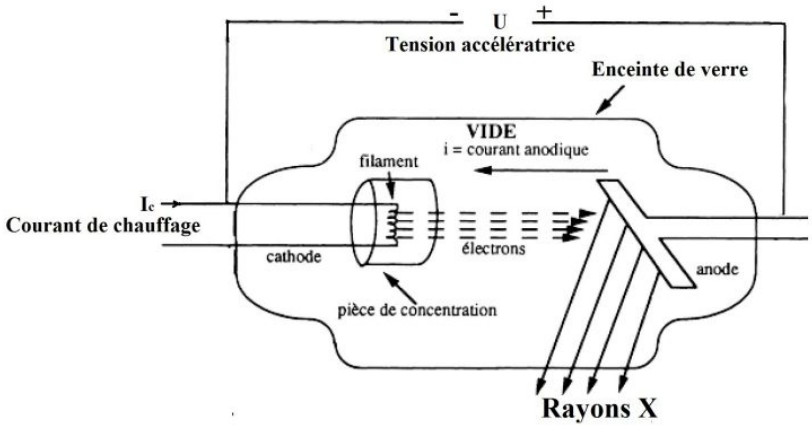



**Figure 1** – Principe de production des rayons X : tube de Coolidge

## I.1. Émission des électrons

Le filament de tungstène d'un tube de Coolidge est assimilé à un fil cylindrique de longueur $l$ et de diamètre $d = 0,2mm$ ; il est enroulé en hélice. En régime permanent, il est parcouru par un courant électrique d'intensité $I_c$, et sa température, constante, est notée $T$.

I.1.1. Donner l'expression de la résistance électrique $R$ du filament.

I.1.2. Donner l'expression de la puissance de Joule dissipée dans le filament.

I.1.3. Rappeler la loi de Stefan donnant la puissance surfacique rayonnée par le filament à la température $T$.

I.1.4. Déterminer l'intensité du courant permettant d'atteindre une température 2600 K. On donne la résistivité du tungstène $\rho(T = 2600) = 7,51.10^{-7}\Omega.m$.

I.1.5. On suppose que chacun des électrons est émis sur la cathode sans vitesse initiale. Exprimer, puis calculer sa vitesse d'impact $v$ sur l'anode lorsqu'il est accéléré par une différence de potentiel $U = U_A - U_C = 40kV$. Commenter.

Lorsqu'ils pénètrent dans l'anode (appelée aussi anticathode), les électrons y interagissent selon deux processus. Le premier processus est un freinage des électrons dans l'anode et il donne un spectre continu (ou bremsstrahlung). Le deuxième processus donne un spectre discontinu, plus intense, dû aux transitions électroniques dans les atomes de la cible, et dans l'exemple considéré dans la figure 2 on a deux raies $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

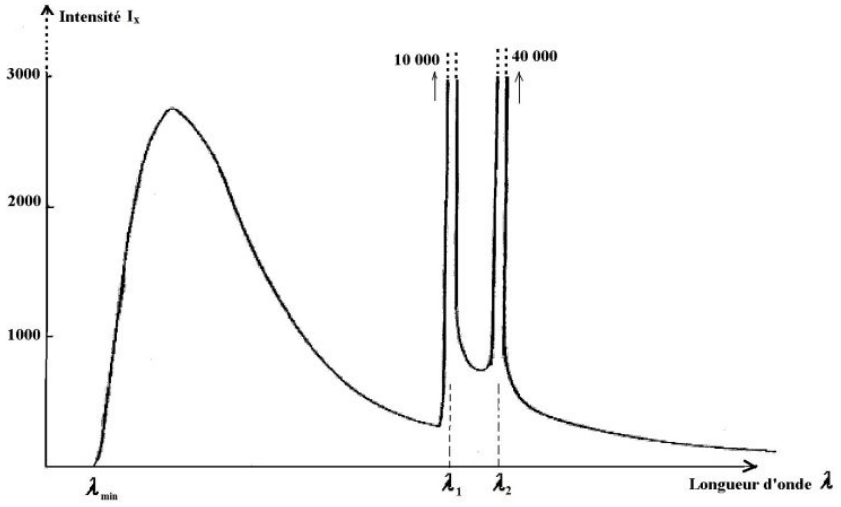



**Figure 2** – Spectre de rayonnements émis par une anode en cuivre sous une tension de 40 kV

I.1.6. Déterminer la relation entre la tension accélératrice $U$ et la longueur d'onde $\lambda_{min}$ du spectre, et expliquer à quelle situation correspond ce rayonnement $\lambda_{min}$ ? Déterminer $\lambda_{min}$ pour $U = 40kV$.

I.1.7. Étude du processus de freinage

Le noyau (cible) de charge $q = Ze$, supposé fixe en un point O, exerce sur l'électron, se trouvant en M, la force électrique $\overrightarrow{F} = -\frac{Z.e^2}{4\pi\varepsilon_0.OM^3}.\overrightarrow{OM}$.

I.1.7.1. Donner la nature et l'allure de la trajectoire de l'électron au voisinage du noyau ; ce mouvement est-il varié ? Justifier.

I.1.7.2. Donner une interprétation expliquant pourquoi le spectre de freinage est continu. On pourra s'aider de schéma(s).

I.2. Considérations énergétiques de fonctionnement du tube de rayons X.

Le tube de production de rayons X est parcouru par un courant d'intensité i = 10 mA et son rendement est $\eta = 1\%$. La tension d'accélération est $U = 40kV$.

I.2.1. Déterminer la puissance électrique consommée par le circuit de haute tension.

I.2.2. Déterminer la puissance rayonnée $P_r$.

I.2.3. Expliquer la nécessite de refroidissement d'un tube de production de rayons X.

I.2.4. L'anode de cuivre est refroidie par la circulation d'eau ; celle-ci entre à $\theta_1 = 20°C$ et sort à $\theta_2 = 55°C$. La capacité thermique massique de l'eau est $c_e = 4,18kJ.kg^{-1}.K^{-1}$. Quel doit être la valeur du débit massique $D_e$ de l'eau ?

## II Transitions électroniques et spectres de raies atomiques

On se propose d'interpréter le rayonnement discret émis par un atome. On étudie d'abord l'exemple, simple, de l'atome d'hydrogène ; puis on pourra généraliser aux atomes de la cible bombardée par des électrons lors de la production de rayons X.

II.1. Étude de l'atome d'hydrogène.

C'est un système, supposé isolé, formé d'un proton (noyau), de masse $m_p = 1836.m$, et d'un électron (de masse m) ; ce dernier est en mouvement autour du proton sous l'action de la force d'attraction coulombienne $\overrightarrow{F}$ ; on posera $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$, de valeur $k = 2,30.10^{-28}SI$.

II.1.1. Modèle classique de Rutherford de l'atome de d'hydrogène

Dans le référentiel galiléen R(OXYZ) centré sur le proton, fixe au point O, on repère le mouvement de l'électron par $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u}_r$ dans la base, de travail, cylindrique $\{\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\}$.

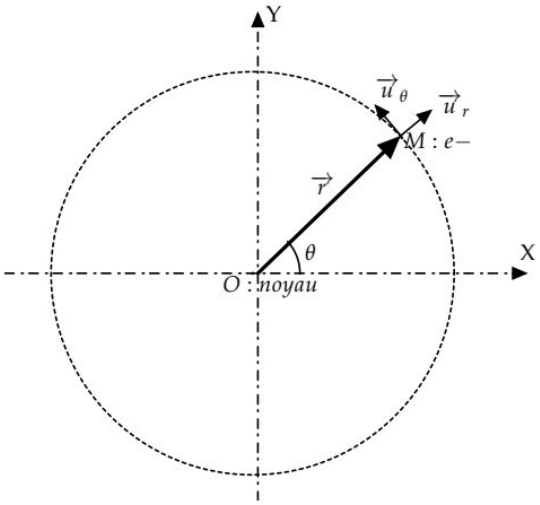



**Figure 3** – L'atome d'hydrogène

II.1.1.1. Rappeler l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le noyau sur l'électron, et montrer que sa trajectoire est plane.

II.1.1.2. On suppose que la trajectoire de l'électron autour du noyau est circulaire de rayon $r$. Exprimer les vecteurs : vitesse $\overrightarrow{v}$, accélération $\overrightarrow{a}$ et moment cinétique, en O, $\overrightarrow{L}_O$.

II.1.1.3. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(r)$, on prendra $E_p(r \to \infty) = 0$.

II.1.1.4. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E(r)$ en fonction de $k$ et $r$.

II.1.2. Insuffisances du modèle classique de l'atome d'hydrogène.

L'électromagnétisme classique, prévoit que l'électron d'accélération $\overrightarrow{a}$ rayonne, et perd, de l'énergie ; il devrait, alors, tomber sur le noyau au bout d'une durée $\tau$.

II.1.2.1. Donner l'expression du dipôle électrique $\overrightarrow{p}$ constitué par l'électron et le proton.

II.1.2.2. Montrer que ce système est équivalent à deux dipôles $\overrightarrow{p}_1 = p_1(t).\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{p}_2 = p_2(t).\overrightarrow{u}_y$. On donne $p_1(t) = p_0.cos(\omega.t)$, déterminer les expressions de $p_0$ et de $p_2(t)$. La base cartésienne est notée $\{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z\}$.

Soit un point M' du plan XOY, repéré par $\overrightarrow{OM'} = r'.\overrightarrow{u}_{r'}$ et par l'angle $\alpha$ tel que $\alpha = (\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_{r'})$. Le dipôle $\overrightarrow{p}_1$ crée un champ électrique de la forme $\overrightarrow{E}_1(M', t) = f(r', \alpha).\frac{d^2 p_1(t-\frac{r'}{c})}{dt^2}.\overrightarrow{u}_\alpha$.

II.1.2.3. Justifier le terme $t - \frac{r'}{c}$ dans $p_1(t - \frac{r'}{c})$.

II.1.2.4. Au loin, $r' \gg r$, l'onde est supposée localement plane ; déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\pi}_1$.

La puissance moyenne rayonnée par l'électron est de la forme : $P_r = \frac{2}{3}.\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}.\overrightarrow{a}^2$, donc l'énergie diminue ainsi que le rayon $r$. On donne $\frac{m}{k} = 3,95.10^{-3}SI$.

II.1.2.5. Exprimer, puis déterminer la "durée de vie" $\tau$ de l'atome d'hydrogène, sachant que le rayon initial est $r = 53,3pm$. Commenter.

II.1.3. Modèle semi-quantique de Bohr (1885-1962, Nobelisé en 1922)

Expérimentalement on avait établi qu'un atome excité, était capable de rayonner une onde électromagnétique. Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde $\lambda_{qp}$ caractéristiques de ces rayonnements vérifient la loi expérimentale de Balmer-Rydberg : $\frac{1}{\lambda_{qp}} = R_H.(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2})$, où $p$ et $q$ sont des entiers non nuls ($p < q$) et $R_H$ est la constante de Rydberg.

On souhaite retrouver théoriquement ce résultat pour l'atome d'hydrogène.

En tenant compte de résultats connus en 1913, Bohr a introduit deux hypothèses :

- La relation entre l'énergie E et la fréquence $\nu_{qp}$ du rayonnement émis : $E = E_q - E_p = h.\nu_{qp}$.

- De plus, il a posé la condition de quantification du moment cinétique : $L_O = n.\hbar$, où $n \in \mathbf{N}^*$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}SI$ est la constante réduite de Planck.

II.1.3.1. D'après la relation de quantification déterminer le rayon $r_n$ de l'orbite circulaire de l'électron en fonction de $m$ , $\varepsilon_0$, e, $\hbar$ et $n$.

II.1.3.2. Calculer le rayon de Bohr de l'atome H dans son état fondamental : $r_1$.

II.1.3.3. Déterminer le module de la vitesse $v_n$, en fonction de $n$ et d'une constante $v_0$ à expliciter. Est-ce une vitesse relativiste ? Justifier.

II.1.3.4. Déterminer l'énergie $E_n(r_n)$, en fonction de $n$ et d'une constante $E_0$ à expliciter.

II.1.3.5. En déduire l'interprétation de la loi expérimentale de Balmer-Rydberg, et donner l'expression de la constante de Rydberg $R_H$ en fonction de $m$ , $\varepsilon_0$ , e ,$\hbar$ et c .

II.1.3.6. Déterminer en eV l'énergie d'ionisation de l'atome H.

Dans une lampe spectrale à hydrogène, on considère les raies correspondant aux transitions de l'électron de l'atome d'hydrogène mettant en jeu les raies visibles de Balmer $p = 2$.

II.1.3.7. Montrer qu'on a quatre raies dans le spectre visible de longueur d'onde : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$, on donnera les longueurs d'ondes extrêmes. On donne : $\frac{1}{R_H} = \lambda_0 \approx 91,2nm$.

II.1.3.8. L'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons X est $100pm$. Peut-on générer des rayons X par les transitions électroniques de l'hydrogène ?

II.1.4. Production de raies X sur une cible de cuivre

Pour le cuivre de numéro atomique Z = 29, on donne les énergies des électrons des couches K, L et M en keV : $E_K = -8,98$, $E_L = -0,93$ et $E_M = -0,07$.

II.1.4.1. Préciser, avec justification, laquelle de ces couches est la plus proche du noyau.

II.1.4.2. Déterminer les longueurs d'ondes correspondant aux transitions électroniques vers cette couche.

## III Application : utilisation des rayons X en imagerie médicale

Les rayons X sont absorbés par la matière en fonction de la nature de la matière et de l'épaisseur de matière traversée. On considère un faisceau de rayons X, de direction x'x, constitué d'un flux homogène de photons. Les phénomènes de diffraction et de diffusion sont négligés. On suppose que la couche de matière d'épaisseur dx et de surface S est constituée d'un seul type d'atome. Le matériau possède une masse volumique $\rho$ et une masse molaire $M$. Voir figure 4.

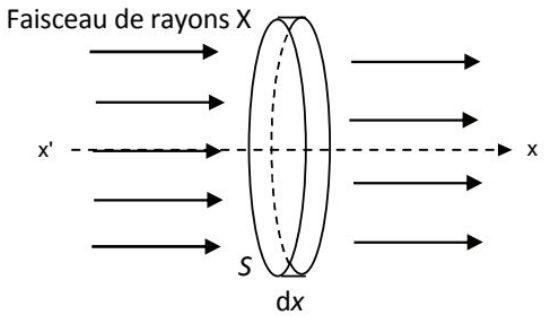



**Figure 4** – Absorption de rayons X

III.1. Exprimer le nombre $dN_a$ d'atomes contenus dans ce volume en fonction de $M$, $\rho$, S, dx et de la constante d'Avogadro $N_A$.

On suppose dx suffisamment petit pour que tous les atomes de la couche soient contenus dans un même plan et on appelle $r_a$ le rayon de ces atomes. On appelle $N(x)$ le nombre de photons incidents du faisceau de rayons X, arrivant en $x$ sur une section S par unité de temps et $N(x+dx)$ le nombre de photons transmis au-delà de la couche d'épaisseur dx, par unité de temps.

III.2. Proposer un modèle simple de l'absorption permettant d'expliquer la variation de $N$ entre x et x+dx.

III.3. En utilisant le modèle précédent, exprimer $N(x+dx)$ en fonction de : $N(x)$, $\rho$, $M$, $r_a$, $N_A$ et dx et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $N(x)$ s'écrit :

$$\frac{dN(x)}{dx} + \frac{\pi.r_a^2.\rho.N_A}{M}.N(x) = 0$$

III.4. Donner la solution de cette équation différentielle. On note par $N_0$ le nombre de photons par unité de temps sur la face d'entrée, repérée par x = 0, et on introduit le coefficient d'absorption $\mu = \frac{\pi.r_a^2.\rho.N_A}{M}$.

III.5. On étudie la radiographie d'un doigt de la main supposé cylindrique : voir figure 5.

L'os du doigt assimilé à un cylindre plein, de rayon $r_o = 0,4cm$, est entouré par le muscle d'épaisseur $e = 0,1cm$. Pour le faisceau de rayons X utilisé, on donne les coefficients d'atténuation (ou d'absorption) linéique de l'os $\mu_o = 1,6cm^{-1}$ et du muscle $\mu_m = 0,38cm^{-1}$.

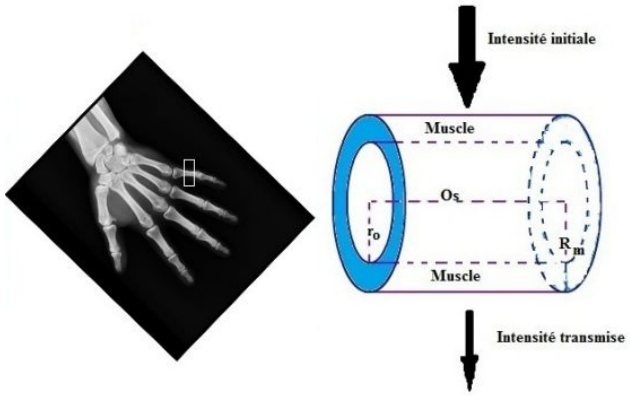



**Figure 5** – Modélisation de la radiographie d'un doigt d'une main

III.5.1. Entre le muscle et l'os, et sur une même épaisseur, lequel absorbe le plus les rayons X ? Donner une interprétation.

III.5.2. On peut caractériser une radiographie par le contraste : $C = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$, où $I_{max}$ et $I_{min}$ sont les intensités transmises maximale et minimale respectivement.
Quel est le sens physique du contraste ? Dans quel intervalle varie-t-il ?

III.5.3. Déterminer l'expression du contraste $C_o$ avec lequel apparait la radiographie de l'os.

III.5.4. Déterminer l'expression du contraste $C_m$ avec lequel on radiographie la forme du muscle entourant l'os.

III.5.5. Calculer le contraste du muscle $C_m$. Le contraste de l'os vaut 0,55 ; quel commentaire peut-on faire ?

III.5.6. Expliquer comment sera modifiée la radiographie si l'os est cassé ou fêlé.

## IV Application : utilisation des rayons X en cristallographie

On étudie la diffraction par réflexion d'un faisceau parallèle de rayons X, monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 1,54.10^{-10}m$, par une poudre d'un cristal (échantillon étudié), celui-ci est formé d'entités (atomes, par exemple) régulièrement placés dans l'espace. La figure 6(a) représente le dispositif expérimental utilisé, il mesure l'intensité $I$ lorsque l'angle $\theta$, entre le faisceau incident et le porte-échantillon, varie ; les entités (diffractantes) sont représentées par des points.

IV.1. Rappeler le principe de Huyghens-Fresnel de la diffraction des ondes électromagnétiques par une ouverture $(\Sigma)$. Dans la suite on admettra le phénomène de diffraction par réflexion.

IV.2. Montrer que le rayon diffracté par réflexion est dévié d'un angle $2\theta$ : voir figure 6.

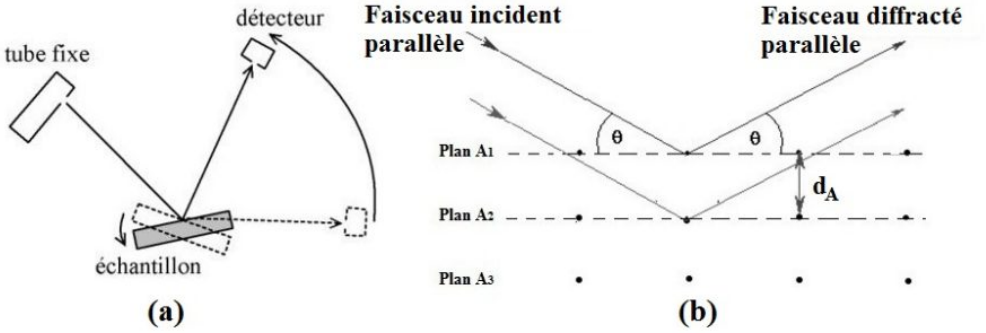



**Figure 6** – Dispostif d'étude de diffraction X

IV.3. Quelle est la forme des surfaces d'ondes pour un faisceau parallèle ? Justifier.

IV.4. A l'aide d'un schéma soigné de la figure 6(b), déterminer la différence de marche optique $\delta_A(M)$ entre les deux rayons diffractés par réflexion et parallèles dans la direction $\theta$ ; ces rayons sont diffractés par deux entités (atomes) appartenant aux plans $A_1$ et $A_2$ d'une famille de plans $A : \{A_{i=1,2,..,p}\}$, distants de $d_A$.

IV.5. Montrer que les maximas d'intensité vérifient la relation $2.d_A.sin(\theta_{max,A}) = n.\lambda$ avec $n$ entier.

IV.6. Application en cristallographie

On étudie la diffraction d'un faisceau parallèle de rayons X par une poudre d'un cristal cubique d'arête a tridimensionnel, mais pour simplifier on raisonne sur la figure 7, à deux dimensions. On étudie l'intensité $I(2\theta)$, diffractée par différentes familles de plans parallèles diffractants, par exemple $A : \{A_{i=1,2,..p}\}$, $B : \{B_{i=1,2,..,q}\}$ et $C : \{C_{i=1,2,..,r}\}$. On s'intéresse à la diffraction à l'ordre $n = 1$.

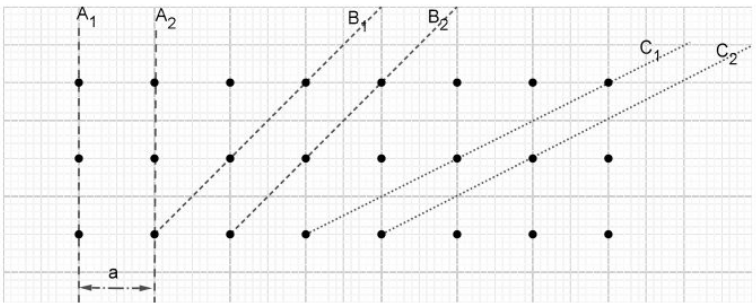



**Figure 7** – Traces des plans, d'un cristal, diffractants les rayons X

IV.6.1. Déterminer les distances interplanaires $d_A$, $d_B$ et $d_C$.

IV.6.2. Déterminer les rapports $r_1 = \frac{sin(\theta_{max,B})}{sin(\theta_{max,A})}$ et $r_2 = \frac{sin(\theta_{max,C})}{sin(\theta_{max,A})}$, les angles $\theta_{max,i}$ correspondent aux maximas d'intensité de ces trois familles de plans $i = A, B, C$.

On considère le cristal de chlorure de césium $CsCl$ : $Cl^-$ est au centre d'un cube, de coté a, dont les sommets sont occupés par $Cs^+$.

IV.6.3. On observe des maximas d'intensités pour les angles : $2\theta_1 = 21,6°$, $2\theta_2 = 30,7°$ et $2\theta_3 = 49,5°$. Faites correspondre chacun de ces angles à l'une des trois familles de plans. En déduire la valeur du paramètre $a$.

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Circuits électriques dans l'ARQS
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Fonctions usuelles et lecture des graphes
- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Modèle scalaire des ondes lumineuses

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière :
**écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp