Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2022, filière MP

Physique II

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : champ magnétique d'une spire circulaire
- Partie 2.1 : traversée d'une barrière de potentiel
- Partie 2.2 : loi de Gamow-Condon-Gurney

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2022/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*
- *Tous les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatibles avec les données fournies.*

Le sujet de cette épreuve est constitué de deux parties indépendantes : la première partie est notée sur ***4 points***, la deuxième sur ***16 points***.

Partie 1 : Champ magnétique d'une spire circulaire

On considère une spire circulaire de rayon R, de centre O et d'axe Oz (figure 1.1). Cette spire est contenue dans le plan Oxy orthogonal à l'axe Oz. Elle est parcourue par un courant électrique d'intensité constante I.

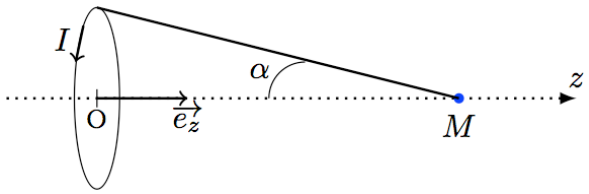


Figure 1.1 : spire circulaire

1. Montrer, par un raisonnement rigoureux, que le champ magnétique $\overrightarrow{B_{sp}}(M)$ créé par la spire au point M de son axe Oz est porté par $\vec{e_z}$.

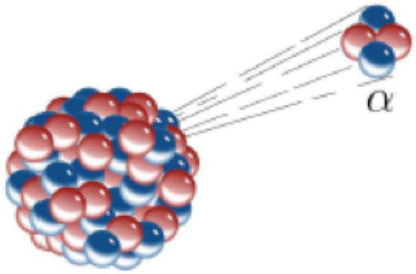
2. Montrer que $\overrightarrow{B_{sp}}(M)$ est donné par l'expression $\overrightarrow{B_{sp}}(M)=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{e_z}$ où α est l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M. Exprimer le champ magnétique $B_{sp}(O)$ au centre O de la spire.

3. Représenter l'allure du champ $B_{sp}(M)$ en fonction de $z=\overrightarrow{OM}.\vec{e_z}$.

4. Application numérique : on fixe $R=5cm$. Calculer $B_{sp}(O)$ pour $I=1A$. Calculer la valeur de I pour avoir $B_{sp}(O)=1T$. Commenter. Citer deux systèmes qui permettent d'obtenir un champ magnétique intense. On donne la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0=4\pi.10^{-7}H.m^{-1}$.

Partie 2 : Radioactivité α

Naturellement présente dans l'Univers, la radioactivité est un phénomène physique dû à des noyaux atomiques instables qui se désintègrent de manière spontanée pour donner un autre élément, en émettant des particules (électrons, neutrons etc) ou des rayonnements électromagnétiques. Historiquement, la radioactivité a été découverte en 1896 par Becquerel avant le noyau de l'atome dans le cas de l'uranium, et très vite confirmée par les Curie pour le radium.



Radioactivité « α »

La radioactivité alpha « α » fut d'abord observée comme un rayonnement de type inconnu, dévié par des champs, électrique et magnétique. Ernest Rutherford identifia en 1908 ces particules à des noyaux d'hélium : un noyau lourd X se désintègre en un noyau fils Y plus léger en éjectant une particule α.

Données :

- Charge d'un électron : $q_e = -e = -1{,}60.10^{-19} C$.
- Masse d'une particule α : $m_\alpha = 6{,}645.10^{-27} kg$.
- Masse d'un électron : $m_e = 9{,}11.10^{-31} kg$.
- Masse d'un proton : $m_p = 1{,}67.10^{-27} kg$.
- Constante de Planck réduite : $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05.10^{-34} J.s$.
- Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9} F.m^{-1}$.
- $1eV = 1{,}60.10^{-19} J$.
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8 m.s^{-2}$.
- Équation de Schrödinger : $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar \dfrac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$.
- $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{x_2}{x} - 1}\, dx \approx x_2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \right)$.

1. Traversée d'une barrière de potentiel

On considère une particule quantique de masse m évoluant dans le potentiel $V(x)$ indépendant du temps (figure 2.1). $V(x)$ est composé de deux zones à potentiel nul séparées par une barrière de hauteur V_0 et d'épaisseur a.

On s'intéresse aux états stationnaires $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-i\dfrac{Et}{\hbar}\right)$ d'énergie E telle que $0 < E < V_0$.

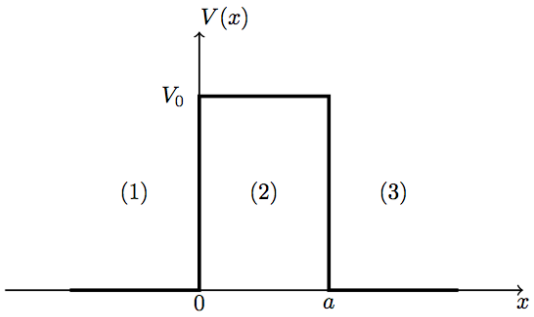


Figure 2.1 : barrière de potentiel

1.1. Que prévoit la mécanique classique dans le cas correspondant à $0 < E < V_0$ pour une particule arrivant sur la barrière par la gauche.
On va étudier le point de vue de la mécanique quantique.

1.2. Écrire l'équation de Schrödinger pour des états stationnaires.

1.3. Résoudre l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde $\varphi(x)$ stationnaire dans les zones (1), (2) et (3) de l'espace et montrer que la solution générale s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} & si \quad x \le 0 \qquad \text{zone (1)} \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} & \text{si} \quad 0 \le x \le a \quad \text{zone (2)} \\ \varphi_3(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x} & si \quad x \ge a \qquad \text{zone (3)} \end{cases}$$

Donner les expressions de $k_1 = k_3$ et k_2.

1.4. Commenter la forme générale de la fonction d'onde totale $\psi(x,t)$ dans chacune des trois zones.

1.5. La source de particules est située en $x = -\infty$. Justifier pourquoi la constante B_3 est nécessairement nulle.

1.6. On s'intéresse, au sens quantique, à la possibilité de traversée de la barrière de potentiel par effet tunnel. On note $T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2$ le coefficient de transmission, rapport du flux de particules atteignant la zone (3) sur le flux de particules incidentes dans la zone (1). Écrire les équations de continuité de $\psi(x,t)$ et de $\frac{d\psi}{dx}(x,t)$ en $x = 0$ et $x = a$. En déduire les conditions aux interfaces qui permettent d'écrire T sous la forme :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \text{sh}^2(k_2 a)}$$

(***La démonstration de cette expression n'est pas demandée.***)

1.7. On suppose que l'approximation de la barrière épaisse ($k_2 a >> 1$) est vérifiée. Trouver une formule approchée de T sous la forme $T \approx T_0 e^{-\eta k_2 a}$. Exprimer T_0 et η.

1.8. Dans la limite de la barrière épaisse, étudier le comportement du coefficient de transmission T en fonction de a, m et $(V_0 - E)$.

1.9. **Applications.** Calculer le coefficient T dans les trois cas suivants :

- pour qu'un cycliste de masse $m = 70kg$ lancé à la vitesse $v = 36km.h^{-1}$ sur une colline de hauteur $H = 20m$ et de largeur $a = 50m$ franchisse cette colline ;
- pour qu'un électron ayant une énergie $E = 1{,}0\ eV$ franchisse une barrière de hauteur $V_0 = 2{,}0\ eV$ et de largeur $a = 10^{-10} m$;
- pour qu'un proton franchisse la barrière dans les mêmes conditions que l'électron.

Commenter chaque résultat. On calculera $k_2 a$ dans chaque cas.

2. Radioactivité α - Loi de Gamow - Condon - Gurney

Une application de l'effet tunnel à travers une barrière de potentiel est l'émission de particules α décrite par la théorie de Gamow - Condon - Gurney. On rend compte de la répulsion coulombienne repoussant une particule α sortant du noyau d'un atome X,

de numéro atomique Z et de nombre de nucléons A, par un puits de potentiel. On constate expérimentalement que certains noyaux lourds sont spontanément émetteurs α suivant la transformation :

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

Nous admettrons que la masse du noyau restant est très grande par rapport à la masse m_α de la particule α ; il reste donc au repos lors d'une émission. La loi d'interaction entre ces deux particules est définie par leur énergie potentielle $V(r)$ représentée en fonction de leur distance r (figure 2.2). Si r est supérieure à une limite r_0, rayon du noyau père (aussi demi-largeur du puits), la particule α, quasi ponctuelle, est soumise au potentiel coulombien du noyau (figure 2.2). Ainsi, pour $r < r_0$, $V(r) = -V_0$ $(V_0 > 0)$ et pour $r > r_0$, $V(r) = \dfrac{K}{r}$ avec $K = \dfrac{(Z-2)e^2}{2\pi\varepsilon_0}$.

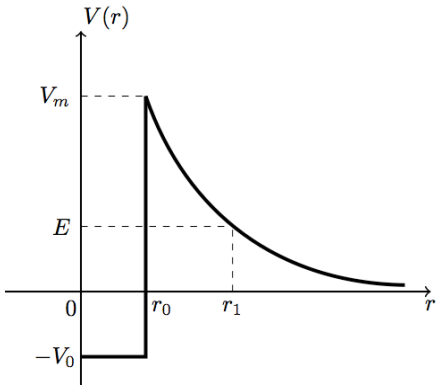


Figure 2.2 : potentiel coulombien du noyau

Dans la suite, on considère un atome X de radium $^{226}_{88}Ra$ avec $r_0 = 7{,}3.10^{-15} m$. Les particules α sont émises avec une énergie $E = 4{,}78\ MeV$.

2.1. Quelle est l'interaction permettant la cohésion entre deux entités de même charge dans le noyau et qui est associée au puits de potentiel ? Estimer la portée de cette interaction.

2.2. Expliquer pourquoi l'émission α ne peut se faire que par effet tunnel.

2.3. En considérant que l'on peut obtenir un ordre de grandeur de la vitesse de la particule α en utilisant la relation $E = \dfrac{1}{2}m_\alpha v^2$, exprimer la longueur d'onde λ_{LDB} de l'onde de matière de De Broglie associée à une particule α. Calculer sa valeur numérique. Commenter.

2.4. Donner les relations permettant de déterminer l'énergie maximale de la barrière V_m et le rayon de sortie de la barrière r_1 en fonction de l'énergie E et des autres données. Calculer numériquement r_1 et V_m. Commenter l'épaisseur de la barrière de potentiel.

2.5. Expliquer pourquoi l'énergie E doit être positive pour espérer franchir la barrière.

2.6. Le résultat sur le coefficient de transmission T, donné précédemment, dans la question 1.7, doit être adapté puisque la barrière a un profil non rectangulaire. Dans un esprit de simplification, on approche le profil coulombien par une succession de barrières rectangulaires élémentaires de hauteur $V(r)$ et d'épaisseur dr (figure 2.3).

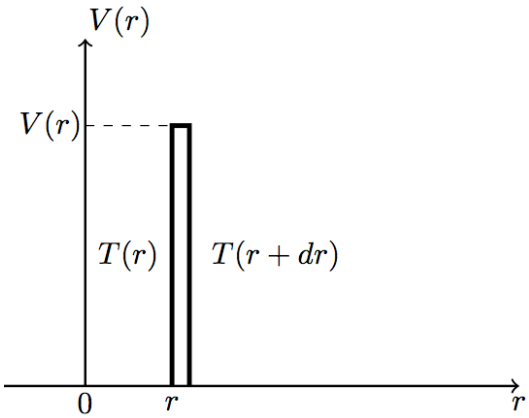


Figure 2.3

2.6.1. En admettant localement l'approximation de la barrière épaisse, montrer que $\frac{dT}{T} = -2k_2(r)dr$. Donner l'expression de $k_2(r)$.

2.6.2. Montrer que le coefficient de transmission pour atteindre r_1 est tel que $ln(T) = -\frac{\sqrt{K}}{\hbar}\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}dr$. On prend $T(r_0)=1$.

2.6.3. En introduisant la variable d'intégration θ telle que $r = r_1\cos^2\theta$, montrer que le coefficient de transmission s'écrit sous la forme :

$$ln(T) = -\frac{2K\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar\sqrt{E}}\left[\theta_0 - \frac{\sin 2\theta_0}{2}\right]$$

2.6.4. Pour une particule α existant à l'intérieur du noyau avec une énergie E comprise entre V_m et 0, établir la formule de Gamow - Condon - Gurney : $lnT = c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{E}}$, c_1 et c_2 étant deux constantes que l'on exprimera en fonction de $\hbar$, K, m_α et r_0. On admettra pour établir cette relation que localement on peut appliquer la formule approchée établie donnant $ln(T)$ et que $\frac{r_0}{r_1}$ est très inférieur à 1.

2.7. Si N_0 est le nombre initial de noyaux émetteurs de particules α, N celui à l'instant t et λ leur constante de désintégration (constante de proportionnalité), exprimer le nombre de noyaux dN qui se désintègrent pendant la durée dt. En déduire l'activité $a^* = -\frac{dN(t)}{dt}$ de l'élément radioactif, nombre de particules α émises par seconde, en fonction de λ, N_0 et t.

2.8. On définit la période radioactive Θ de l'élément (encore appelée temps de demi-vie), comme la durée pour laquelle la moitié des noyaux initialement présents s'est désintégrée. Exprimer Θ et calculer sa valeur numérique pour le radium $^{226}_{88}Ra$. On donne : $\lambda(^{226}_{88}Ra) = 4{,}33.10^{-4}\ an^{-1}$.

2.9. On suppose que la particule α existe primitivement dans le noyau et qu'elle oscille entre les deux bords du puits avec la vitesse v_0.

2.9.1. Exprimer la vitesse v_0 de la particule α dans le noyau en fonction de m_α, E et V_0.

2.9.2. Exprimer la fréquence des oscillations de la particule α en fonction de v_0 et r_0.

2.9.3. À chaque collision avec la paroi située en $r = r_0$, la particule α a une probabilité T de franchir la barrière de potentiel par effet tunnel et donc de sortir du puits. Exprimer le nombre de particules α émises par unité de temps en fonction de N, v_0, r_0 et T. En déduire le nombre de noyaux dN qui se désintègrent pendant la durée dt.

2.9.4. En identifiant l'expression de dN établie dans la question 2.7 et celle établie dans la question 2.9.3, montrer que $\lambda = \frac{v_0 T}{2r_0}$.

2.9.5. Montrer que $ln\Theta = c_3 + \frac{c_4}{\sqrt{E}}$. Exprimer c_3 et c_4 en fonction des données.

2.9.6. Le résultat du modèle est comparé aux données expérimentales dans le graphe de la figure 2.4 (en échelles logarithmiques). Commenter.

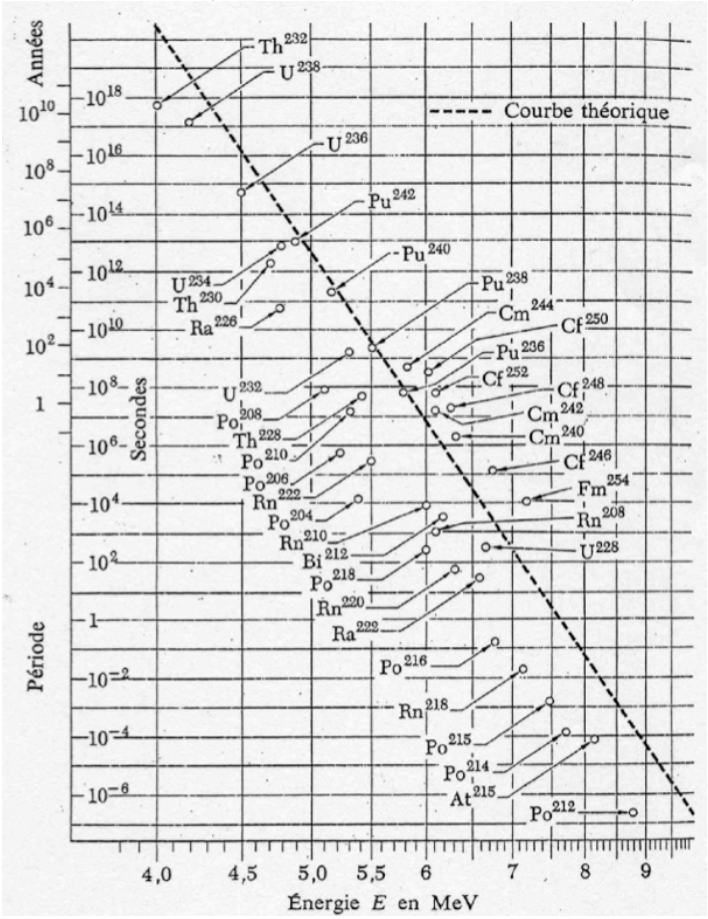


Figure 2.4 : Période des émetteurs α en fonction de l'énergie de la particule α émise

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp