Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2024, filière MP

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice : intégrales de x^n e^(-3x)
- Partie 1 : une variable aléatoire
- Partie 2 : une intégrale impropre
- Partie 3 : produit de convolution et transformée
- Partie 4 : convolutions itérées

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Cette copie est une ressaisie du sujet par un enseignant, pas le document officiel : elle peut contenir des fautes de frappe. En cas de doute, c'est le sujet officiel qui fait foi. Elle sera remplacée dès que nous aurons une copie officielle.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2024/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Concours National Commun

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1

Session 2024 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 beures

Exercice

(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x} dx$ et pour tout entier naturel non nul $n, I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-3x} dx$.

1. **a)** Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = \frac{1}{3}$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $x^n \mathrm{e}^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1} \mathrm{e}^{-3x} dx = \frac{-A^{n+1}}{3} \mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n \mathrm{e}^{-3x} dx$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n = \dfrac{n!}{3^{n+1}}$.

5. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

b) Déterminer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1 : Etude d'une variable aléatoire

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1. **a)** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente.

b) Déterminer I_0 en fonction de t, (on pourra faire le changement de variable ($u = x\sqrt{t}$).

c) Déterminer I_1 sous forme d'une expression simple de t.

2. **a)** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout réel $u \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x)dx$$

b) En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}$.

3. **a)** Montrer que g_t est une densité de probabilité. Dans la suite, on note X_t une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ admettant g_t , pour densité.

b) Déterminer F_t la fonction de répartition de la variable aléatoire X_t .

c) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

d) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

e) Déterminer la valeur de t pour que l'écart type $\sigma(X_t)$ de X_t soit egal à 1.

4. Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante :

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

a) Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$.

b) **i)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

ii) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

iii) Est ce qu'on peut avoir $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$? Justifier votre réponse.

Partie 2 : Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x)dx$, (on rappelle que m_n dépend de t).

1. Déterminer pour tout entier k tel que $k \geq 0, m_{2k}$ et m_{2k+1}.

2. Montrer que, pour tous réels a, b et c tel que $a > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx$ est une intégrale convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\Delta}{4a}}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$

3. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

4. Déterminer, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

5. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}$.

6. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$.

7. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente.

8. Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}$.

Partie 3 : Produit de convolution et une transformé

Dans la suite du problème, on note **E** l'ensemble des fonctions h continues sur, $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif M et un réel strictement positif λ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq M f_t(\lambda x)$.

On admet le résultat suivant : *si ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications ϕ_1 et ϕ_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\phi(x,y)| \leq \phi_1(x)\phi_2(y)$, alors les deux expressions $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dx \right) dy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,y)dy \right) dx$ sont bien définies et elles sont égales.*

On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, noté $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, muni des deux lois" $+$" et "." usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(\mathbf{E}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la fonction f_t est un élément de **E**.

2. Soient φ et ψ deux éléments de **E**. On note $\varphi * \psi$ l'application définie, pour tout réel x, pour lequel l'intégrale existe, par $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du$.

a) Montrer que $\varphi * \psi$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

c) Déterminer $f_t * f_t$.

d) Montrer que $\varphi * \psi$ est un élément de **E**.

3. Soit φ un élément de $\mathbf{E}$. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du$.

a) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, les expressions de $\widehat{\varphi}'(x)$ et $\widehat{\varphi}''(x)$, chacune à l'aide d'une intégrale.

4. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$.

a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x, u) de $\mathbb{R}^2$,

$$u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha\,(u^2 + x^2)$$

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx . \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$.

c) Montrer que, pour tout réel ω, $\widehat{(\varphi * \psi)}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)$.

Partie 4 : Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathbf{E}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de $\mathbf{E}_1$, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1, \phi_n$ est un élément de $\mathbf{E}_1$.

2. Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x, \widehat{\phi_n}(x)$ en fonction de $\hat{\phi}(x)$ et de n.

3. Dans cette question, on prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$, ou f_t est la fonction définie au début du problème.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel $C_n(t)$, à déterminer, tel que $\forall x \in \mathbb{R};\ \phi_n(x) = C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle ν strictement positive, tel que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel u, $\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\nu u^2}$.

4. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathbf{E}_1$. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \ \text{ et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

a) Montrer que la fonction $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{n,1}$ et de $M_{n,2}$.

b) En déduire que $M_{n,1} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

5. On suppose de plus dans cette question que la fonction ϕ vérifie $M_{1,1} = 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right)$.

- FIN DE L'ÉPREUVE -

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp