Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2025, filière MP

Mathématiques II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice : diagonalisation d'une matrice d'ordre 3
- Partie 1 : préliminaires
- Partie 2 : semi-normes invariantes
- Partie 3 : caractérisation des symétriques positives

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Cette copie est une ressaisie du sujet par un enseignant, pas le document officiel : elle peut contenir des fautes de frappe. En cas de doute, c'est le sujet officiel qui fait foi. Elle sera remplacée dès que nous aurons une copie officielle.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2025/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Concours National Commun[1]

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 2

Session 2025 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 beures

EXERCICE

(Noté 4 points sur 20)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{Vect}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

1. On pose $f_1 = (1, 1, 1)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

a) Déterminer deux vecteurs f_2 et f_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, avec $f_2 = (a, 0, b)$ et $f_3 = (0, c, d)$, où a, b, c et d sont à déterminer.

b) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = \mathrm{O}_3$, avec $\mathrm{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle.

b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

3.a) Déterminer les deux réels α et β tels que : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont les réels trouvés dans la question 1. a).

b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible, qui sont à déterminer, telles que $A = PDP^{-1}$.

c) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

PROBLÈME

On désigne par n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes.
Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par $\chi_M(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M)$ le polynôme caractéristique de M.
On note $M^\intercal$ la matrice transposée de la matrice M et $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice carrée M.
On rappelle que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.
On note $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $a_1, \ldots, a_n$ dans cet ordre. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $S^\intercal = S$.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal S X \geq 0$.
$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

PARTIE 1
Préliminaires

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$, est linéaire.

2. Soient $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{l,k}\ n_{k,l}$.

b) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

c) Montrer que si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.

3. On considère l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est diagonale et } \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la dimension de F.

c) En déduire que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $G = PFP^{-1} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad X \mapsto X + \mathrm{Tr}(X).A$$

a) Vérifier que Φ_A est une application linéaire.
Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(*) \quad \Phi_A(X) = B$$

b) On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.

i) On suppose que M est une solution de l'équation matricielle $(*)$. Déterminer $\mathrm{Tr}(M)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de $\mathrm{Tr}(B)$.

ii) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $(*)$.

iii) En déduire que Φ_A est un automorphisme d'espaces vectoriels.

c) On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) = -1$

i) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(B)$, l'équation matricielle $(*)$.

ii) Montrer que Φ_A est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F_1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer F_1 et F_2.

PARTIE 2

La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

Dans cette partie, on note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2 et que sa base canonique est $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers h et k tels que $1 \leq h, k \leq n$, on désigne par $\delta_{h,k}$ le symbole de Kronecker qui est défini par $\delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases}$.
On rappelle que pour tous entiers naturels i, j, k, l tels que $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$. Une application q de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^+$ est dite semi-norme sur $\mathcal{E}$, si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda M) = |\lambda| q(M)$.
- $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(M + N) \leq q(M) + q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(MN) = q(NM)$.

1. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.

a) Montrer que $q(\mathrm{O}_n) = 0$, où O_n est la matrice nulle de $\mathcal{E}$, et que pour tout M de $\mathcal{E}$, $q(-M) = q(M)$.

b) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, $|q(M) - q(N)| \leq q(M + N)$.

c) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, si $q(N) = 0$ alors $q(M + N) = q(M)$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\mathrm{Tr}(M)|$. Montrer que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

Dans les questions 3. et 4. de cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1}$$

a) Montrer que $AB = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}$.

b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^{n} \left(\alpha_h \sum_{j=1}^{n} E_{h,j}\right)$.

4. Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que pour tous entiers distincts i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $q(E_{i,j}) = 0$, (*on pourra utiliser le fait que* $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$).

b) En déduire que $q\left(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1}E_{i,1}\right) = 0$.

c) Vérifier que $q(M) = q\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}\right)$.

d) Montrer, en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ qui définissent la matrice B, que $q(M) = q(BA)$.

e) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.

5 l valable ? justifier votre réponse.

PARTIE 3

Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\intercal M = \mathrm{I}_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Soit la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) Montrer que pour tous entiers k et i, $1 \leq k, i \leq n$, $|u_{k,i}| \leq 1$.

ii) Vérifier que $DU = (\lambda_k u_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n}$.

iii) En déduire que $\mathrm{Tr}(DU) \leq \mathrm{Tr}(D)$.

b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

i) Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathcal{O}(n)$ et une matrice $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, avec pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, a_i sont des réels positifs et $S = P.D.{}^tP$.

ii) Montrer, en posant $V = P^\intercal U P$, que $SU = P(DV)P^\intercal$.

iii) En déduire que $\mathrm{Tr}(SU) \leq \mathrm{Tr}(S)$.

2. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)$$

a) i) Montrer que, pour tous réels a, b, α, il existe un réel φ tel que, $a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.

ii) En déduire que, si pour tout réel α, $a\cos\alpha + b\sin\alpha \leq a$ alors $b = 0$.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\Pi_{p,q}$ le plan engendré par la famille (e_p, e_q). On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de $u_{p,q}$ sur $\Pi_{p,q}$ est la rotation du plan $\Pi_{p,q}$ d'angle α et la restriction de $u_{p,q}$ sur l'orthogonal de $\Pi_{p,q}$ est l'application identité de l'orthogonal de $\Pi_{p,q}$.

i) Écrire la matrice $U_{1,2}$ de $u_{1,2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et montrer que $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii) Calculer $\mathrm{Tr}(AU_{1,2})$ en fonction de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et de α.

iii) En déduire que $a_{1,2} = a_{2,1}$.

iv) Écrire, dans le cas général, la matrice $U_{p,q}$ de $u_{p,q}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

v) Calculer, dans le cas général, $\mathrm{Tr}(AU_{p,q})$ en fonction de $a_{p,q}$, $a_{q,p}$, $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et de α.

vi) En déduire que A est une matrice symétrique.

c) i) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme g canoniquement associée à la matrice A.
Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note γ_i la valeur propre de g associée au vecteur propre v_i.

ii) Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_j(v_j) = -v_j$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$, $w_j(v_k) = v_k$.
Soit W_j la matrice de l'endomorphisme w_j relativement à la base $\mathcal{B}$.
Vérifier que W_j est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{Tr}(AW_j)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de γ_j. En déduire que $\gamma_j \geq 0$.

d) En déduire que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Topologie des espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp