Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2026, filière MP

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice : la loi binomiale négative
- Partie 1 : une intégrale auxiliaire
- Partie 2 : la fonction F
- Partie 3 : transformée de Laplace de F
- Partie 4 : abscisse de convergence
- Partie 5 : fonctions équivalentes

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2026/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵣⵣⵉⵡⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵙⵏⴰⵡⵉⵏ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⵜⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⴷ ⵜⵙⵙⵏⵜⵉⵙ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

INSEA

CONCOURS NATIONAL COMMUN

D'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2026

Épreuve de : **Mathématiques I**

Filière : **MP**

Date : **14-05-2026** Durée **4 Heures** de **08H00 à 12H00**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être un point de clarification d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons de son initiative.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique ou informatique (y compris la calculatrice) est interdit

Cette épreuve comporte **4** pages en format **A4** en plus de cette page de garde

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants, à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice - La loi binomiale négative
(Noté sur 4 points sur 20)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Les X_i représentent la répétition d'une même expérience aléatoire : la $i^{\text{ème}}$ expérience est un succès si et seulement si X_i prend la valeur 1. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On pose également $q = 1-p$.

1.1. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ainsi que son domaine de convergence.

1.2. Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ pour le reste de l'exercice.

1.3. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ converge et que sa somme vaut 1.

On peut maintenant définir une variable aléatoire Y_n à valeurs dans $\{n, n+1, \ldots\} = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ par sa loi :

$$\forall k \geqslant n, \quad \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

1.4. Reconnaître la loi de Y_1.

1.5. Expliquer rapidement pourquoi S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1.6. Pour $k \geqslant n$, calculer $\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n-1)$.

1.7. Comment interpréter la loi de la variable Y_n ?

1.8. On pose Z_n la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'expérience nécessaire à l'obtention d' exactement n succès lors de notre répétition d'expérience (Z_n vaut le rang d'obtention du n-ème succès).

1.8.1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour Z_n ?

1.8.2. Sans utiliser la question **1.7.** précédente, et en effectuant un raisonnement par dénombrement, montrer que Z_n suit la même loi que Y_n.

1.9. On considère la série entière $\sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(Y_n = k)\, t^k$ de variable réelle t, et on note f_n sa somme.

Calculer le rayon de convergence R de cette série entière, et montrer en particulier que $R > 1$.

1.10. Montrer que, pour $t \in]-R, R[$:

$$f_n(t) = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}$$

1.11. Montrer que Y_n est d'espérance finie et calculer $E(Y_n)$. *On pourra penser à dériver f_n.*

Problème

On note ch la fonctions cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique définies pour tout réel x, par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pourra utiliser les développements en séries entières suivants,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathrm{sh}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall u \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} u^n.$$

On rappelle également les valeurs des intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{2n} = \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi(2n)!}{4^n (n!)^2}, \qquad w_{2n+1} = \int_0^{\pi} \cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour tout réel x pour lequel la série converge, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

1ère Partie - Calcul d'une intégrale auxiliaire

Pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque l'intégrale existe, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

2.1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2.2. Étude de la fonction g

2.2.1. Montrer que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.2.2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

2.2.3. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$g'(x) = -I \times \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

2.2.4. Calculer $g(0)$.

2.2.5. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$ et déterminer sa valeur.

2.3. En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

2ème Partie - Étude de la fonction F

3.1. Définition de la fonction F

3.1.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

3.1.2. Étudier les variations de la fonction F et la convexité de son graphe.

3.2. Encadrement de la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$

3.2.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{4^n}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}.$$

3.2.2. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x)$$

3.2.3. Quelle est la limite de F en $+\infty$?

3.3. Une expression intégrale de F

3.3.1. Pour $t \in [0;\pi]$ fixé, donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \exp(2x\cos(t))$, en précisant son rayon de convergence.

3.3.2. En déduire la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2x\cos(t)}\,dt.$$

3.4. Pour tout réel x, on pose $f_1(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} e^{2x\cos(t)}\,dt$. Trouver la limite de $f_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$ en appliquant le théorème de la convergence dominée.

3.5. Équivalent de F

On définit, pour x réel, $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x\cos(t)}\,dt$.

3.5.1. Soit $x > 0$ fixé. À l'aide du changement de variable $u = 2x(1-\cos t)$, établir :

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}\int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}}\,du$$

3.5.2. Vérifier que, si $x > 0$ et $u \in [0;2x]$, alors $u - \frac{u^2}{4x} \geqslant \frac{u}{2}$.

3.5.3. Établir que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}}\,du = \sqrt{\pi}$$

et en déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

3.6. Conclure que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}.$$

3ème Partie - Transformée de Laplace de F

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur tout intervalle $]0,a]$ avec $a > 0$. On définit sa transformée de Laplace L_f, lorsque l'intégrale converge, par

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt.$$

4.1. On considère la fonction G définie sur $]0,+\infty[$ par $G(t) = \frac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$.

4.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $L_G(x)$ existe si et seulement si $x > 2$.

4.1.2. À l'aide du changement de variable $u = (x-2)t$ et compte tenu de la valeur de I trouvée en 1ère Partie, déterminer, pour $x > 2$, la valeur de $L_G(x)$.

4.2. Calcul de $L_F(x)$. On rappelle que F est définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

4.2.1. Déterminer le domaine de définition de L_F.

4.2.2. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,dt$.

4.2.3. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

4.2.4. Montrer que, pour tout réel $x > 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}e^{-xt}\,dt$ converge.

4.2.5. En déduire que, pour tout réel $x > 2$, on a :

$$L_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}.$$

4.2.6. Établir que, pour x > 2, on a :

$$L_F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

4.3. Montrer l'équivalence $L_F(x) \underset{x\to 2^+}{\sim} L_G(x)$.

4ème Partie - Cas général : Transformée de Laplace et abscisse de convergence

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, et intégrable sur tout intervalle $]0,a]$ $(a>0)$. On définit l'ensemble de convergence

$$I(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid t \longmapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\right\},$$

5.1. Montrer que si $x_0 \in I(f)$, alors $[x_0,+\infty[\subset I(f)$.

On note E l'ensemble des fonctions f ci-dessus telles que $I(f) \neq \varnothing$ et $I(f) \neq \mathbb{R}$.

5.2. Soit $f \in E$.

5.2.1. Montrer que $I(f)$ admet une borne inférieure, notée $\alpha(f)$.

5.2.2. En déduire que $I(f)$ est de la forme $]\alpha(f),+\infty[$ ou $[\alpha(f),+\infty[$.

5.3. Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $x \mapsto L_f(x)$ est continue sur $]\alpha(f),+\infty[$.

5.4. Montrer que si f est positive, alors L_f est décroissante. En déduire que, si $\alpha(f) \in I(f)$, alors L_f est bornée sur $[\alpha(f),+\infty[$.

5.5. Soit $g \in E$ une fonction positive telle que L_g soit bornée sur $]\alpha(g),+\infty[$. Établir les propriétés suivantes :

5.5.1. Il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x > \alpha(g)$ et tout $A \geq 0$,

$$\int_0^A g(t)\, e^{-xt}\, dt \leq M.$$

5.5.2. En déduire que la transformée de Laplace de g est définie sur $[\alpha(g),+\infty[$ (c'est-à-dire que $\alpha(g) \in I(g)$).

5ème Partie - Comparaison des transformées de Laplace de deux fonctions équivalentes

Soient g et h deux fonctions positives appartenant à E, telles que :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x)$$

6.1. Montrer que leurs abscisses de convergence coïncident : $\alpha(g) = \alpha(h)$.

On suppose dans la suite que $\alpha(h) \notin I(h)$.

6.2. Quelle conséquence en déduire sur le comportement de $L_h(x)$ lorsque $x \to \alpha(h)^+$?

6.3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$,

$$|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h(t)|.$$

6.4. En déduire que, pour tout $x \in]\alpha(h),+\infty[$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)|\, e^{-xt}\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)|\, e^{-xt}\, dt.$$

6.5. Conclure que L_g et L_h sont équivalentes lorsque x tend vers $\alpha(h)^+$.

FIN DU SUJET

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp