Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2026, filière MP

Mathématiques II

Ce que traite le sujet

- Exercice : réflexions d'un espace euclidien
- Partie 1 : exemples
- Partie 2 : spectre de Phi_A,B
- Partie 3 : diagonalisation
- Partie 4 : multiplications à gauche et à droite
- Partie 5 : adjoint de Phi_A,B

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/mp/2026/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants, à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice
(Noté sur 4 points sur 20)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $< x \mid y >$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x. Pour tout vecteur u non nul de E, on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - x.$$

1.1. Étude de l'application φ_u

1.1.1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de E.

1.1.2. En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer son inverse φ_u^{-1}.

1.1.3. Soit x appartenant à E, calculer $\langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(x)\rangle$.

1.1.4. En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) \mid \varphi_u(y)\rangle =< x \mid y > .$$

1.1.5. On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^\perp$.
Déterminer l'image de D_u par φ_u.
En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u.

1.1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

1.2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

1.2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de $H^\perp$.

1.2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^\perp$ puis celle de la projection orthogonale sur H.

1.2.3. Soit v un vecteur unitaire de $H^\perp$. Écrire la matrice de φ_ν dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \Delta^\perp, \quad \psi(x) = -x.$$

1.3.1. Montrer que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

1.3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.

Problème

Notations et conventions. Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geq 2$. On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et l'on pose $E = M_n(\mathbb{K})$. De plus I_r désigne la matrice identité d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in E$, A^{T} et $\mathrm{tr}(A)$ désignent respectivement la matrice transposée de A et la trace de A. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ le spectre de A dans $\mathbb{K}$, et χ_A son polynôme caractéristique.

Une matrice $M \in E$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Enfin, $\mathcal{B}_c = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désigne la base canonique de E.

Pour $A, B \in E$, on considère l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ de E défini par :

$$\Phi_{A,B} : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto AM - MB \end{array} \right.$$

Lorsque $A = B$, on notera simplement $\Phi_A = \Phi_{A,A}$.

1ère Partie - Exemples

1.1. Vérifier que I_n et A appartiennent à $\mathrm{Ker}\,(\Phi_A)$.

1.2. Cas $n = 2$: Dans cette question, on se place dans $E = M_2(\mathbb{R})$ et l'on considère $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

1.2.1. Donner la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2.2. En déduire que Φ_A est nulle si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

Dans la suite de cette question, on suppose que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc que Φ_A n'est pas nulle.

1.2.3. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

1.2.4. Vérifier que le polynôme caractéristique de Φ_A est

$$\chi_{\Phi_A} = X^2 \left(X^2 - \left((d-a)^2 + 4bc \right) \right).$$

1.2.5. En déduire que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

1.3. Cas d'une projection : Dans cette question, on se place dans le cas général où $n \geq 2$, on suppose $E = M_n(\mathbb{R})$, et l'on considère une matrice $A \in E$ vérifiant

$$A^2 = A, \qquad A \neq 0, \qquad A \neq I_n.$$

1.3.1. Montrer que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de Φ_A.

1.3.2. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de Φ_A ?

1.3.3. Justifier que Φ_A est diagonalisable et que $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\,(\Phi_A)$.

1.3.4. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{r} \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $A = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \mathrm{I_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$.

1.3.5. Soit $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$. En considérant $M_1 = P \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Calculer $\Phi_A(M_1)$.

1.3.6. En déduire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\,(\Phi_A)$.

2ère Partie - Spectre de $\Phi_{A,B}$

Soit n une entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = M_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1. Soit $B \in E$.

2.1.1. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si B^{T} l'est.

2.1.2. Établir que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B^{\mathsf{T}})$.

2.1.3. Montrer que, si B est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de B.

2.1.4. Montrer que B est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à X^n.

2.1.5. Montrer la réciproque de la question **2.1.3.**

2.2. Montrer que si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de B^T alors XY^T est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$.

2.3. En déduire l'inclusion

$$\{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)\} \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}).$$

2.4. Soit M un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre α.

2.4.1. Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k M = M\left(\alpha I_n + B\right)^k$.

2.4.2. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(A)M = MP\left(B + \alpha I_n\right)$.

2.4.3. En déduire que $\chi_A\left(B + \alpha I_n\right)$ n'est pas inversible.

Dans la suite de cette partie, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.5. En factorisant χ_A dans $\mathbb{C}[X]$, déduire que :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\Phi_{A,B}\right) \subset \{\lambda - \mu, \quad (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\}.$$

2.6. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est nilpotent si, et seulement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont nilpotentes.

3ère Partie - Diagonalisation de $\Phi_{A,B}$

3.1. On suppose que A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et B^T.

3.1.1. Soit $(Z_1, \ldots, Z_n)$ une famille de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i Z_i^\mathsf{T} = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad Z_i = 0$$

On pourra multiplier la somme à droite par $\overline{Z_k}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. $\overline{Z_k}$ étant la colonne constituée des conjugués des coefficients de Z_k.

3.1.2. En déduire que la famille $\left(X_i Y_j^\mathsf{T}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$.

3.1.3. Prouver que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable en tant qu' endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

3.2. Dans cette question, on considère l'application, encore notée $\Phi_{A,B}$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\Phi_{A,B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad M \mapsto AM - MB,$$

où A et B, à coefficients réels, sont aussi vues comme des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3.2.1. Justifier que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\Phi_{A,B}\right) \subset \mathbb{R}$.

3.2.2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. Justifier que $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\Phi_{A,B}\right)$ et que $\bar{\lambda} - \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\Phi_{A,B}\right)$, où $\bar{\lambda}$ est le conjugué de λ.

3.2.3. En déduire que χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$.

3.2.4. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre α. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre μ. Exprimer $A(MX)$ en fonction de MX (et des scalaires α et μ).

3.2.5. Montrer que pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, l'application linéaire

$$\psi : \left\{ \begin{array}{c} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M \quad \longmapsto MX \end{array} \right.$$

est surjective.

3.2.6. En déduire que A est diagonalisable.

3.3. On considère l'application

$$T : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^\mathsf{T} \end{cases}$$

3.3.1. Montrer que T est un automorphisme de E.

3.4. Montrer que :

$$T \circ \Phi_{A,B} \circ T^{-1} = \Phi_{-B^\mathsf{T},-A^\mathsf{T}}$$

3.4.1. Déduire que $\Phi_{-B^\mathsf{T},-A^\mathsf{T}}$ et $\Phi_{A,B}$ sont semblables.

3.4.2. Conclure que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable si, et seulement, si A et B le sont.

4ère Partie - Étude de $\Phi_{A,B}$ via les multiplications à gauche et à droite

4.1. Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soient $u, v \in \mathcal{L}(F)$ deux endomorphismes diagonalisables tels que $uv = vu$.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $F_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_F)$ le sous-espace propre de u associé à λ.

4.1.1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, le sous-espace F_λ est stable par v.

4.1.2. Montrer que l'endomorphisme induit par v sur F_λ est diagonalisable.

4.1.3. En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base.

4.2. Dans la suite on considère les endomorphismes de $E = M_n(\mathbb{K})$ suivants :

$$g_A : M \longmapsto AM \quad \text{et} \quad d_B : M \longmapsto MB$$

4.2.1. Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$P\,(g_A) = g_{P(A)} \quad \text{et} \quad P\,(d_B) = d_{P(B)}$$

4.2.2. Montrer que g_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable ; et que d_B est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

4.2.3. Vérifier que g_A et d_B commutent.

4.2.4. Retrouver le fait que si A et B sont diagonalisables, alors $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

5ère Partie - Adjoint de $\Phi_{A,B}$

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

5.1. Pour M et N appartenant à E, on pose : $\langle M \mid N \rangle = \mathrm{tr}\left(M^\mathsf{T} N\right)$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite de cette partie, E est muni de ce produit scalaire.

5.2. On note $\Phi^*_{A,B}$ l'endomorphisme adjoint de $\Phi_{A,B}$. Montrer que :

$$\forall M \in \mathrm{E}, \quad \Phi^*_{A,B}(M) = A^\mathsf{T} M - M B^\mathsf{T}.$$

5.3. Soit D appartenant à E vérifiant : $\forall M \in \mathrm{E}, \quad DM = MD$. Prouver qu'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que : $D = aI$.

5.4. En déduire que $\Phi_{A,B}$ est l'application nulle si et seulement s'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$A = B = aI.$$

5.5. Démontrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est autoadjoint si et seulement si les matrices A et B sont symétriques.

5.6. On suppose que B est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que n est un entier pair.

5.7. On suppose de plus que A est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme orthogonal de E.

FIN DU SUJET

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/mp