Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2004, filière PSI

Physique I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : œil
- Partie 2 : microscope composé
- Partie 3 : microscope électronique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2004/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

Épreuve de Physique I

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 10 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 10 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Microscopie

La microscopie est la technique permettant de rendre visible des détails fins d'un objet. L'épreuve propose d'en aborder quelques aspects. Elle est constituée de 3 parties largement indépendantes. La première partie étudie quelques propriétés de l'œil humain. Cette étude est nécessaire pour la compréhension du fonctionnement du microscope étudié dans la partie 2. La dernière partie aborde un aspect de la microscopie électronique.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagné de son unité dans le système international des unités (SI).

Données utiles

- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Constante de PLANCK : $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s
- Divergence en coordonnées cylindriques d'un champ vectoriel $\overrightarrow{a} = a_r(r,z)\ \overrightarrow{u}_r + a_z(r,z)\ \overrightarrow{u}_z$:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

- Rotationnel en coordonnées cylindriques d'un champ vectoriel $\overrightarrow{a} = a_r(r,z)\ \overrightarrow{u}_r + a_z(r,z)\ \overrightarrow{u}_z$:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right) \overrightarrow{u}_\theta$$

1ère partie

Œil

L'œil est l'organe pair de la vue. Le globe oculaire, approximativement sphérique, est constitué principalement des éléments suivants :

- l'*iris* est une membrane circulaire, contractile, occupant le centre antérieur de l'œil et percée en son milieu d'un orifice, la pupille, dont le diamètre ϕ peut varier entre $2\ \mathrm{mm}$ et $8\ \mathrm{mm}$; l'iris joue le rôle d'un diaphragme permettant de régler la quantité de lumière qui pénètre dans l'œil ;
- le *cristallin*, en forme de lentille biconvexe, est le principal élément réfringent de l'œil ; il est placé dans le globe oculaire en arrière de la pupille ;
- la *rétine* est une membrane du fond de l'œil, formée de cellules nerveuses en rapport avec les fibres du nerf optique, et sensible à la lumière ; elle joue le rôle d'un transducteur qui participe à la transformation du flux lumineux en influx nerveux.

L'ensemble du globe oculaire est protégé par une paroi appelée la *sclérotique* et qui, en avant de l'œil, prend une forme bombée et devient transparente formant la *cornée*.

L'œil ne voit clairement un objet que si son image par ses différents milieux réfringents se forme sur la rétine. Pour cela, les muscles de l'œil peuvent agir sur le cristallin pour modifier sa courbure : c'est le phénomène d'*accommodation*.

Pour l'étude optique simplifiée proposée dans ce problème, l'œil sera schématisé par une seule lentille convergente (*L*) de distance focale image f_i variable, placée devant un écran (*E*) qui schématise la rétine à une distance $d = \mathrm{OF}$ appelée profondeur de l'œil. Un diaphragme (*D*), d'ouverture circulaire de diamètre ϕ variable entre $2\ \mathrm{mm}$ et $8\ \mathrm{mm}$, est placé contre la lentille (figure 1). Le tout est plongé dans l'air d'indice de réfraction 1.

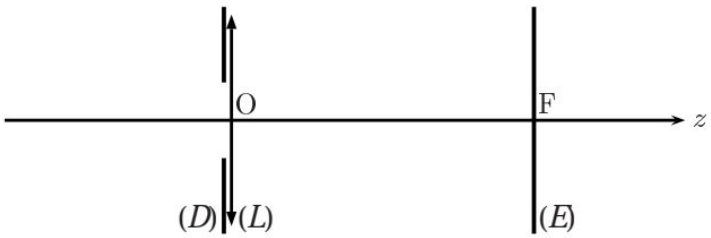


Figure 1: Modèle simplifié de l'œil.

La puissance *P* de l'œil est définie par :

$$P = \frac{1}{f_i} \tag{1}$$

P s'exprime en dioptrie (δ) lorsque f_i est exprimée en mètre ($1\ \delta = 1\ \mathrm{m}^{-1}$). L'accommodation traduit la capacité de l'œil à faire varier sa puissance *P*.

1.1. Champ latéral et champ en profondeur

1.1.1. Le champ latéral couvert par l'œil représente l'ensemble des points de l'espace qui peuvent être vus nettement par l'œil. Il est défini par un cône de sommet O et d'angle α compris entre 40°et 50°. Cependant, l'acuité visuelle n'est pas la même pour toutes les directions de ce champ. Elle est maximale au centre sur un cône d'angle au sommet $\alpha_F = 5°$. En déduire l'ordre de grandeur du diamètre ϕ_F de la zone de perception des détails située au centre de la rétine pour un œil de profondeur $d = 17\ \mathrm{mm}$.

1.1.2. Comment doit varier la puissance P en fonction de la distance $p = -\overline{OA}_o$ d'un objet $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ placé devant l'œil sur l'axe optique principal pour que $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ soit vu nettement ? Représenter graphiquement $P(p)$.

1.1.3. En réalité la puissance P de l'œil est limitée par une puissance maximum $P_{\max}$. Le *punctum proximum* (P_p) est le conjugué de la rétine au maximum de la puissance P. Pour un œil normal P_p se trouve à une distance $|\overline{\mathrm{OP}}_p| = 25\ \mathrm{cm}$. En déduire la valeur de la puissance maximum $P_{\max}$ pour un œil normal de profondeur $d = 17\ \mathrm{mm}$.

1.1.4. Le *punctum remotum* (P_r) est le conjugué de la rétine au minimum de la puissance P. Pour un œil normal P_r est rejeté à l'infini. En déduire la valeur de la puissance minimum $P_{\min}$ pour un œil normal de profondeur $d = 17\ \mathrm{mm}$.

1.1.5. Déduire de ce qui précède l'amplitude maximale d'accommodation $A = P_{\max} - P_{\min}$ et calculer sa valeur numérique.

1.2. Défauts de l'œil et correction

1.2.1. Myopie

Pour les mêmes valeurs numériques des puissances $P_{\max}$ et $P_{\min}$, un œil myope possède une profondeur $d_m = 17,5\ \mathrm{mm}$.

1.2.1.1. Où se trouve l'image d'un objet très loin par un tel œil lorsqu'il n'accommode pas ? L'œil myope est-il capable de former l'image de cet objet sur la rétine ?

1.2.1.2. Déterminer les positions du *punctum remotum* et du *punctum proximum* pour cet œil.

1.2.1.3. Quel type de lentille mince faut-il accoler à la cornée pour corriger une telle anomalie ? Calculer sa distance focale image f_m. Commenter.

1.2.2. Hypermétropie

Un œil hypermétrope a une profondeur $d_h = 16,5\ \mathrm{mm}$ et possède les mêmes valeurs des puissances $P_{\max}$ et $P_{\min}$ que l'œil normal.

1.2.2.1. Où se trouve l'image d'un objet très loin par un tel œil lorsqu'il n'accommode pas ? L'œil hypermétrope est-il capable de former l'image de cet objet sur la rétine ? Si oui, quelle est la puissance P_n nécessaire ?

1.2.2.2. Déterminer les positions du *punctum remotum* et du *punctum proximum* pour cet œil.

1.2.2.3. Quel type de lentille mince faut-il accoler à la cornée pour corriger une telle anomalie ? Calculer sa distance focale image f_h. Commenter.

1.2.3. Presbytie

Avec l'âge, le cristallin perd de son élasticité. Ceci qui se traduit par une diminution de l'amplitude maximale d'accommodation : l'œil devient presbyte. On convient de considérer qu'un œil devient presbyte lorsque sa puissance maximale diminue de plus de $1,14\ \delta$. À quelle distance minimale doit-on placer un document devant un tel œil, initialement normal, pour pouvoir le lire ?

1.3. Limite de résolution angulaire de l'œil

Le pouvoir de résolution est la capacité de l'œil à distinguer deux points très rapprochés. Cette capacité est limitée par la structure granulaire de la rétine formée de cellules de diamètre moyen $g = 5,1\ \mu\mathrm{m}$ au contact les unes avec les autres.

1.3.1. On admet que pour que la séparation de deux points puisse se faire distinctement, il faut que leurs images se forment sur deux cellules de la rétine séparées par une troisième. En déduire l'expression littérale puis la valeur numérique de la limite de résolution angulaire α_ℓ d'un œil normal de profondeur $d = 17$ mm.

1.3.2. À quelle distance de l'œil doit-on placer un objet pour pouvoir apprécier ses détails les plus fins ? Justifier la réponse.

2ème partie

Microscope composé

Le microscope est un instrument optique qui permet d'observer les détails d'objets microscopiques ayant un diamètre apparent trop petit pour être distingués à l'œil nu.

Un microscope composé est un système optique centré constitué principalement d'un objectif et d'un oculaire d'axe optique principal commun.

L'objectif est constitué d'un ensemble assez complexe de lentilles. Il est caractérisé (figure 2) par ses plans principaux objet Π_{o_1} et image Π_{i_1} et par ses foyers objet F_{o_1} et image F_{i_1}. Les distances focales objet f_{o_1} et image f_{i_1} sont telles que $f_{o_1} = \overline{H_{o_1}F_{o_1}}$ et $f_{i_1} = \overline{H_{i_1}F_{i_1}}$. L'objectif donne d'un objet $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ perpendiculaire à l'axe optique une image réelle $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$. La figure 2 explique le principe de formation de l'image $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ par l'objectif. Pour les applications numériques, on prendra $f_{i_1} = 4$ mm.

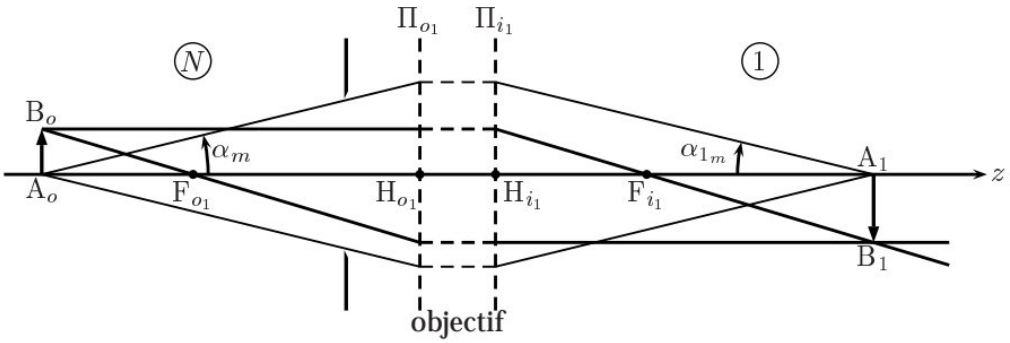


Figure 2: Formation de l'image intermédiaire par l'objectif du microscope.

L'objectif est stigmatique pour un point objet A_o quelconque situé sur l'axe et il en donne une image A_1 située sur l'axe. Il est aussi aplanétique pour un petit objet $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ perpendiculaire à l'axe optique principal et ce même si l'angle α que font les rayons lumineux avec l'axe optique principal peut atteindre une valeur α_m de l'ordre de $70°$. Un rayon lumineux issu de A_o et faisant un angle α_o quelconque avec l'axe ressort de l'objectif en passant par A_1 et en faisant un angle α_1 avec l'axe. On admettra que, contrairement à α_o, l'angle α_1 reste toujours petit. La condition d'aplanétisme pour l'objectif se traduit par la relation :

$$N\,\overline{\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o}\sin\alpha_o = \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}\sin\alpha_1 \approx \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}\,\alpha_1 \qquad (2)$$

D'autre part, l'objectif considéré est dit « à immersion » car l'objet est immergé dans un liquide d'indice N qui vient au contact de l'objectif. L'objectif est caractérisé par son *ouverture numérique* : $\Omega_n = N\sin\alpha_m$. On admet enfin que $f_{o_1} = -N\,f_{i_1}$. Pour les applications numériques on prendra $N = 1,515$ et $\alpha_m = 70°$.

L'oculaire, quant à lui, sera représenté par une lentille mince convergente unique de centre O_2, de foyer objet F_{o_2} et de foyer image F_{i_2}. Sa distance focale image est $f_{i_2} = \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{F}_{i_2}} = 20$ mm.

Le foyer image F_{i_1} de l'objectif et le foyer objet F_{o_2} de l'oculaire sont séparés d'une distance $\Delta = \overline{\mathrm{F}_{i_1}\mathrm{F}_{o_2}}$ appelée intervalle optique. Pour les applications numériques, on prendra $\Delta = 200$ mm.

2.1. Mise au point

2.1.1. Qu'appelle-t-on conditions de GAUSS ?

2.1.2. L'objectif du microscope considéré fonctionne-t-il dans les conditions de GAUSS ? Pourquoi ?

2.1.3. En utilisant la figure 2 pour exprimer de deux manières différentes le grandissement transversal G_{t_1} de l'objectif défini par :

$$G_{t_1} = \frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o}} \tag{3}$$

montrer que les positions de l'objet A_o et de son image A_1 par l'objectif sont reliées par la relation de conjugaison de NEWTON :

$$\overline{\mathrm{F}_{o_1}\mathrm{A}_o}\,\overline{\mathrm{F}_{i_1}\mathrm{A}_1} = f_{o_1}\,f_{i_1} \tag{4}$$

2.1.4. L'œil de l'observateur est supposé normal. Où l'image intermédiaire $\mathrm{A_1B_1}$ donnée par l'objectif doit-elle se situer pour que l'observateur puisse voir l'image définitive sans accommodation ?

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que cette condition est réalisée lors de l'utilisation normale du microscope.

2.1.5. Compléter alors le schéma de la figure 2, après l'avoir reporté sur la copie de composition, en traçant le cheminement à travers l'ensemble du microscope (objectif et oculaire) du faisceau lumineux issu du point B_o représenté figure 2.

2.1.6. En déduire la position de l'objet $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ caractérisée par la distance algébrique $\overline{\mathrm{F}_{o_1}\mathrm{A}_o}$ que l'on exprimera en fonction de Δ, N et f_{i_1}.

2.1.7. Déterminer, dans les mêmes conditions, le grandissement transversal G_{t_1} de l'objectif.

2.1.8. Application numérique : calculer $\overline{\mathrm{F}_{o_1}\mathrm{A}_o}$ et G_{t_1}.

2.2. Cercle oculaire

2.2.1. En utilisant le schéma de la figure 2, tracer le cheminement à travers le microscope des rayons lumineux extrêmes du faisceau conique de sommet A_o et de demi-angle au sommet α_m.

2.2.2. En déduire que tous les rayons lumineux issus de A_o situés à l'intérieur d'un cône de sommet A_o et de demi-angle au sommet α_m traversent le plan focal image de l'objectif à l'intérieur d'un cercle de rayon R que l'on exprimera en fonction de f_{i_1} et Ω_n.

2.2.3. En supposant que l'oculaire n'obture aucune partie de la lumière sortant de l'objectif, déterminer le rayon ρ du faisceau cylindrique sortant du microscope et formé par les rayons lumineux issus de A_o ; on exprimera ρ en fonction de f_{i_1}, f_{i_2}, Ω_n et Δ.

2.2.4. En fait, tout se passe comme si les rayons sortant de l'objectif étaient diaphragmés par une ouverture circulaire de rayon R, centrée en F_{i_1} et située dans le plan focal image de l'objectif.

2.2.4.1. En déduire que tous les rayons issus d'un objet étendu perpendiculaire à l'axe et sortant de l'instrument sont ainsi astreints à traverser un disque appelé *disque oculaire*, de centre C, dont on calculera la position et le rayon ρ_c. Où doit-on placer l'œil pour recevoir le maximum de lumière ? On supposera par la suite que cette condition est réalisée.

2.2.4.2. Application numérique : calculer ρ_c et $\overline{\mathrm{F}_{i_2}\mathrm{C}}$. Commenter.

2.3. Grossissement

On définit le grossissement G du microscope comme étant le rapport entre l'angle θ' sous lequel on voit un objet donné $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ à travers le microscope et l'angle θ sous lequel on voit le même objet à l'œil nu lorsque $\mathrm{A}_o\mathrm{B}_o$ est placé à la distance minimale de vision distincte δ. Pour les applications numériques on prendra $\delta = 250\ \mathrm{mm}$.

2.3.1. Exprimer G en fonction de f_{i_1}, f_{i_2}, Δ et δ et calculer sa valeur numérique.

2.3.2. Exprimer le rayon ρ_c du cercle oculaire en fonction de G, Ω_n et δ.

2.3.3. Pour quelle valeur G_e du grossissement G, le rayon ρ_c du cercle oculaire devient-il égal au rayon ρ_0 de la pupille de l'œil ? Exprimer G_e en fonction de Ω_n, δ et ρ_0 et calculer numériquement G_e. On prendra $\rho_0 = 2,5\ \mathrm{mm}$.

2.3.4. Comment peut-on définir un rayon *utile* ρ_u de la pupille pour recevoir un maximum de lumière ? Déterminer l'expression de ρ_u et représenter ses variations en fonction de G en supposant ρ_0 constant.

2.4. Pouvoir de résolution

La résolution du microscope est sa capacité de permettre à un œil de distinguer les détails les plus fins d'un objet. Deux facteurs principaux limitent la résolution du microscope optique. Il s'agit de la diffraction et de la structure granulaire de la rétine de l'œil.

2.4.1. Influence de la diffraction

2.4.1.1. Dire succinctement en quoi consiste le phénomène de diffraction.

Pour l'étude du microscope composé, tout se passe comme si la lumière était diffractée par le diaphragme circulaire de rayon R situé dans le plan focal image de l'objectif et centré en F_{i_1}.

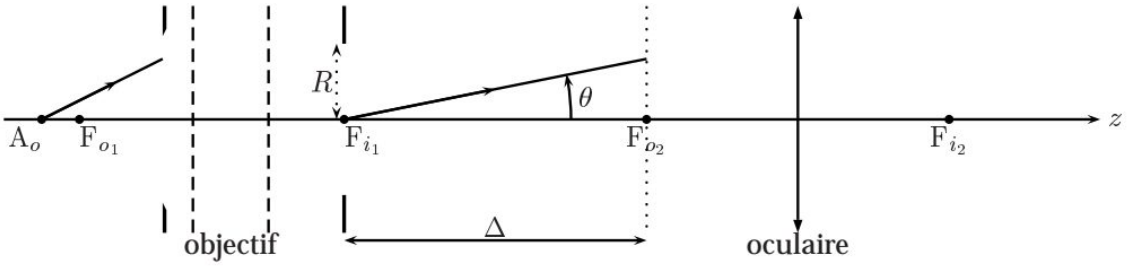


Figure 3: Diaphragme diffractant dans son environnement.

Le microscope est éclairé par l'onde monochromatique de longueur d'onde λ issue d'un objet ponctuel A_o conjugué géométrique du foyer objet F_{o_2} de l'oculaire.

À cause de la diffraction par le diaphragme de rayon R, l'amplitude a_d de l'onde diffractée dans le plan focal objet de l'oculaire dépend de l'angle θ que fait la direction d'observation avec l'axe optique principal. On admet qu'elle est donnée par :

$$a_d(\theta) = a_0 \frac{2\,J_1\left(\dfrac{2\,\pi\,R\,\theta}{\lambda}\right)}{\dfrac{2\,\pi\,R\,\theta}{\lambda}} \tag{5}$$

où a_0 est une constante et J_1 est la fonction de BESSEL d'ordre 1. La figure 4 donne une représentation graphique de la fonction $\varrho \mapsto J_1(2\,\pi\,\varrho)/2\,\pi\,\varrho$. Elle s'annule pour la première fois pour $\varrho_1 \approx 0,61$.

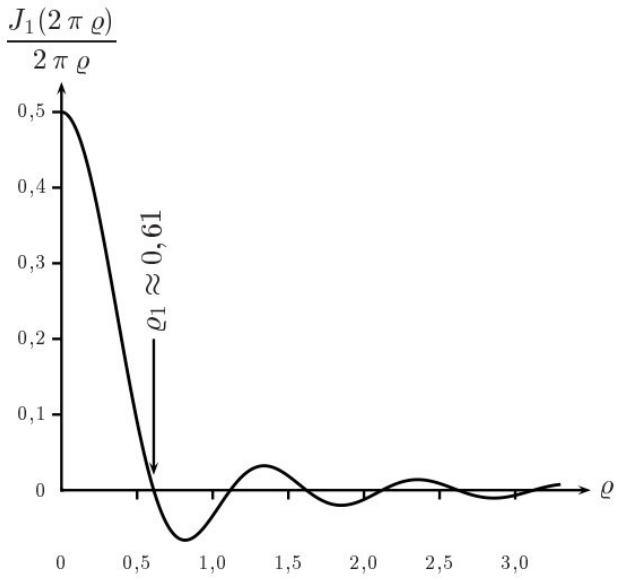


Figure 4: Représentation graphique de $\dfrac{J_1(2\,\pi\,\varrho)}{2\,\pi\,\varrho}$ en fonction de ϱ.

2.4.1.2. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I_d(\theta)$ dans le plan focal objet de l'oculaire en notant I_0 la valeur de l'intensité en F_{o_2}.

2.4.1.3. Donner l'aspect de la figure de diffraction obtenue dans le plan focal objet de l'oculaire passant par F_{o_2}. On justifiera *succinctement* la réponse.

2.4.1.4. Déterminer le rayon angulaire θ_d de la tache centrale de diffraction.

2.4.1.5. On considère (critère de RAYLEIGH) qu'il y a séparation entre deux points A_o et B_o si la distance des centres des taches centrales de diffraction est au moins égal au rayon d'une tache centrale. En déduire la distance S_d, dans le plan objet du microscope, correspondant à la plus petite distance de deux points objets A_o et B_o séparables. On exprimera S_d en fonction de λ et Ω_n. Commenter le résultat obtenu en précisant les facteurs permettant d'améliorer le pouvoir de résolution.

2.4.2. Influence du pouvoir séparateur de l'œil

Du fait de la structure granulaire de la rétine, l'œil n'est capable de distinguer deux points que si leur écart angulaire dépasse une valeur minimale α_ℓ appelée pouvoir séparateur de l'œil. Pour les applications numériques on prendra $\alpha_\ell = 3 \times 10^{-4}$.

2.4.2.1. Tracer le cheminement à travers le microscope des faisceaux lumineux issus de deux points A_o et B_o disposés symétriquement par rapport à l'axe optique principal dans le plan conjugué par l'objectif du plan focal objet de l'oculaire.

2.4.2.2. En déduire la distance minimale S_s que doit séparer les deux points A_o et B_o dans le plan objet du microscope pour que l'œil puisse les distinguer en l'absence de la diffraction. On exprimera S_s en fonction de G, α_ℓ et δ.

2.4.3. Discussion

2.4.3.1. En exploitant l'étude précédente, montrer qu'il existe une valeur *minimale* G_d du grossissement G telle que le pouvoir de résolution soit limité par la diffraction.

2.4.3.2. La diffraction est-elle responsable de la limitation du pouvoir de résolution du microscope étudié ? Justifier. On prendra $\lambda = 0,5\ \mu\mathrm{m}$.

2.4.3.3. Dans le cas où le pouvoir de résolution est limité par la diffraction, comment varie-t-il en fonction de la longueur d'onde du rayonnement utilisé pour éclairer l'objet à observer ?

3ème partie

Microscope électronique

3.1. Principe

Le microscope électronique exploite une propriété quantique d'un faisceau d'électrons. En effet, à un électron d'impulsion $p = m_e v$, où m_e et v sont respectivement la masse et la vitesse de l'électron, est associée une onde de longueur d'onde λ_e donnée par la relation de DE BROGLIE :

$$\lambda_e = \frac{h}{p} \tag{6}$$

où h est la constante de PLANCK.

Les électrons sont produits par effet thermoélectronique dans un canon à électrons placé dans le vide. Ils sont ensuite accélérés sous une différence de potentiel $V_c = 10\ \mathrm{kV}$.

3.1.1. Exprimer la vitesse v_0 des électrons accélérés en fonction de leur masse m_e de leur charge e et de V_c. Pour cela on négligera la vitesse initiale d'émission des électrons.

3.1.2. En déduire leur longueur d'onde λ_e.

3.1.3. Application numérique : calculer v_0 et λ_e.

3.1.4. Comparer la longueur d'onde λ_e de l'onde associée à l'électron, à celle λ de la lumière visible et dire pourquoi le microscope électronique peut avoir un pouvoir de résolution meilleur que celui du microscope optique. On rappellera auparavant les limites en longueur d'onde du spectre de la lumière visible.

3.2. Lentille électrostatique

Dans le microscope électronique, comme dans le microscope optique, la formation d'une image agrandie de l'objet à observer nécessite l'utilisation de dispositifs capables de dévier la direction de propagation de l'onde. Le but de cette section est d'étudier le principe de fonctionnement d'une lentille électrostatique qui peut être utilisée pour dévier la trajectoire des électrons dans un microscope électronique.

3.2.1. Champ électrostatique dans la lentille

Dans la région (R) de l'espace appelée « lentille électrostatique » règne un champ *électrostatique* non uniforme $\overrightarrow{E}$. La région (R) est vide de charge électrique et telle que : $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ et $-\ell \leqslant z \leqslant +\ell$. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est produit par un dispositif invariant par rotation d'un angle θ quelconque autour de l'axe Oz et qui admet le plan $z = 0$ comme plan de symétrie.

Le champ électrostatique est nul en dehors de la région (R).

3.2.1.1. Montrer, en évoquant des arguments clairs, que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ s'écrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = F(r,z)\ \overrightarrow{u}_r + G(r,z)\ \overrightarrow{u}_z \tag{7}$$

où F et G sont deux fonctions quelconques des coordonnées r et z uniquement que l'on ne demande pas d'expliciter pour le moment. $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ est la base orthonormée locale du système de coordonnées cylindriques.

3.2.1.2. Que vaut $G(r,z)$ dans le plan $z=0$? Justifier.

3.2.1.3. Rappeler les équations locales vérifiées par le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dans la région ($\mathcal{R}$).

3.2.1.4. En déduire que les composantes F et G du champ électrostatique vérifient les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial G}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial (r\,F)}{\partial r} + \dfrac{\partial (r\,G)}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

3.2.1.5. Le dispositif qui crée le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dans la région ($\mathcal{R}$) impose $F(r,z) = \beta\, r$ avec $\beta = 2\,U_0/R^2$, U_0 étant une constante. En déduire que $G(r,z) = \beta'\, z$ et donner l'expression de β' en fonction de β.

3.2.1.6. Montrer que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel électrostatique ϕ que l'on exprimera en fonction de U_0, r et z.

3.2.1.7. Quelle est la nature de la surface équipotentielle passant par l'origine ? Justifier la réponse et représenter graphiquement cette surface. Que représente U_0 ?

3.2.2. Mouvement de l'électron dans la lentille

À l'instant choisi comme origine, un électron pénètre dans la région ($\mathcal{R}$) au point I_0 de coordonnées $r = r_0 \ll R$, $z = -\ell$ avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0\ \overrightarrow{u}_z$, $v_0 > 0$. Dans toute la suite, on négligera l'action de la pesanteur sur le mouvement de l'électron.

3.2.2.1. En exploitant la projection du théorème du moment cinétique sur l'axe $\mathrm{O}z$, montrer que, dans la région ($\mathcal{R}$), le mouvement de l'électron se fait dans un plan méridien $\theta =$ constante.

3.2.2.2. Établir les équations différentielles vérifiés séparément par r et z. À quelle condition sur U_0, le mouvement de l'électron est-il confiné au voisinage de l'axe $\mathrm{O}z$. En supposant que cette condition est satisfaite dans toute la suite, montrer que les équations différentielles précédentes peuvent s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, r = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - 2\,\omega^2\, z = 0 \tag{9}$$

et donner l'expression de ω en fonction de e, m_e, U_0 et R.

3.2.2.3. Résoudre l'équation différentielle en z et déterminer l'expression de $z(t)$ vérifiant les conditions initiales.

3.2.2.4. Dans toute la suite, on suppose satisfaite la condition $\omega\,\ell \ll v_0$. Montrer alors, que la vitesse $\dot{z}$ de l'électron reste pratiquement égale à v_0 et en déduire la durée t_1 nécessaire à l'électron pour traverser la zone ($\mathcal{R}$).

3.2.2.5. Résoudre de même l'équation différentielle en r et montrer que la trajectoire électronique reste au voisinage de l'axe $\mathrm{O}z$. Quelle est l'hypothèse correspondante en optique ?

3.2.2.6. Déterminer les composantes du vecteur vitesse de l'électron au point I de sa sortie de la région ($\mathcal{R}$).

3.2.2.7. Montrer que le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme en dehors de la région ($\mathcal{R}$).

3.2.2.8. Déterminer la coordonnée $z_{F'}$ du point d'intersection de la trajectoire électronique avec l'axe Oz. La position de F' dépend-elle de I_0 ? Justifier le nom de foyer donné à F'. Cette lentille électrostatique est-elle convergente ou divergente ? Comment peut-on agir sur la distance focale de la lentille.

3.2.2.9. Application numérique : calculer $z_{F'}$ pour $\ell = 1,0 \times 10^{-4}$ m et $\omega\,\ell/v_0 = 10^{-2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Optique géométrique et formation des images
- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi