Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2004, filière PSI

Physique II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : thermodynamique de l'atmosphère
- Partie 2 : mouvement d'un ballon-sonde

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2004/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 8 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Sondage atmosphérique

L'épreuve aborde quelques aspects de la physique de l'atmosphère terrestre. Elle est constituée de 2 parties largement indépendantes entre elles.

Dans toute la suite on négligera les différents mouvements de la Terre de manière à pouvoir assimiler le référentiel terrestre R_T à un référentiel galiléen. $\mathrm{R}(\mathrm{O}, x, y, z)$ désigne un repère cartésien lié à R_T ; l'axe $\mathrm{O}z$ est pris vertical ascendant.

L'intensité g du champ de pesanteur sera supposée constante. Tous les gaz rencontrés dans cette étude seront considérés comme parfaits.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Données utiles

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$
- Intensité du champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$
- Pression atmosphérique à l'altitude $z = 0\ \mathrm{km}$: $p_0 = 1,013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$
- Température ambiante à l'altitude $z = 0\ \mathrm{km}$: $T_0 = 290\ \mathrm{K}$
- Masse molaire de l'air : $M_a = 29,0 \times\ 10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}$
- Masse molaire de l'hélium : $M_{\mathrm{He}} = 4,0 \times\ 10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}$
- Rapport des capacités calorifiques de l'air : $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 7/5$
- Rapport des capacités calorifiques de l'hélium : $\gamma' = \dfrac{c_p}{c_v} = 5/3$

1ère partie

Thermodynamique de l'atmosphère

Tout au long de cette partie, on considérera que l'air atmosphérique est en équilibre hydrostatique sous la seule influence du champ de pesanteur. D'autre part on négligera la rotondité de la Terre de sorte que les variables d'état ne dépendent que de l'altitude z.

1.1. Étude préliminaire

1.1.1. Équlibre hydrostatique

1.1.1.1. Montrer que la pression $p_a(z)$ de l'air à l'altitude z est reliée à l'intensité g du champ de pesanteur et à la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air par la relation :

$$\frac{\mathrm{d}p_a(z)}{\mathrm{d}z} = -g\,\mu_a(z) \tag{1}$$

Pour cela on pourra considérer une tranche d'atmosphère comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ et exprimer la condition de son équilibre mécanique après avoir dressé un bilan des forces auxquelles elle est soumise.

1.1.1.2. Exprimer la masse volumique μ_a de l'air en fonction de sa température T_a et de sa pression p_a. Calculer numériquement la masse volumique de l'air à l'altitude $z = 0$ km notée μ_0.

1.1.1.3. Déduire de ce qui précède l'équation différentielle liant la pression p_a à l'altitude z pour un profil de température $T_a(z)$ donné.

1.1.2. Application : modèle de l'atmosphère isotherme

Dans cette question *on suppose* que la température de l'atmosphère est uniforme et partout égale à T_0.

1.1.2.1. Montrer que la pression $p_a(z)$ est alors donnée par :

$$p_a(z) = p_0 \exp\frac{-z}{H_a} \tag{2}$$

et donner l'expression de la constante H_a.

1.1.2.2. Pourquoi la constante H_a est-elle appelée « échelle de hauteur » ? En donner une interprétation graphique. Calculer numériquement H_a. Commenter le résultat obtenu en calculant la distance Δz_1 nécessaire pour que p_a varie de 1%.

1.1.2.3. Établir dans ces conditions l'expression de $\mu_a(z)$ en fonction de μ_0 et z.

1.1.3. Poussée d'Archimède

Considérons un volume V, limité par une surface fermée Σ au sein de l'atmosphère au repos dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

Montrer que le système contenu à l'intérieur de la surface Σ est soumis de la part du reste de l'atmosphère à une force pressante totale, appelée aussi force de poussée $\overrightarrow{\Pi}_A$ ou poussée d'ARCHIMÈDE, donnée par :

$$\overrightarrow{\Pi}_A = -m_d\,\overrightarrow{g} \tag{3}$$

où $m_d = \iiint_V \mu\,\mathrm{d}\tau$ est la masse d'air déplacé c'est-à-dire la masse qu'aurait le volume V s'il était occupé par l'air atmosphérique dans les conditions d'équilibre de l'atmosphère.

On rappelle que les forces de pression peuvent être décrites par une densité volumique d'effort donnée, en un point M où la pression est $p_a(\mathrm{M})$, par $\overrightarrow{f_p}(\mathrm{M}) = -\overrightarrow{\nabla} p_a(\mathrm{M})$. D'autre part, la condition d'équilibre hydrostatique peut être généralisée par $\overrightarrow{\nabla} p_a = \mu_a \, \overrightarrow{g}$.

1.2. Sondage de l'atmosphère

Un ballon-sonde est constitué par une enveloppe fermée (ballon) à laquelle est accrochée une nacelle contenant des instruments de mesure : sondes de température, de pression, d'humidité, d'hygrométrie, ... ainsi que ceux nécessaires à la transmission radio des données.

L'enveloppe, la nacelle et les instruments qu'elle contient ont une masse totale $m = 20$ kg.

Initialement ($z = 0$ km) l'enveloppe est partiellement gonflée à l'aide d'une quantité de matière n d'hélium.

Au besoin, on pourra négliger la variation de la pression d'un point à un autre du ballon-sonde. D'autre part, on négligera le volume de la nacelle devant celui du ballon.

Le diamètre du ballon ne peut dépasser une valeur critique $\phi_c = 8$ m. Au-delà de ϕ_c le ballon éclate. On négligera la raideur de l'enveloppe.

1.2.1. Calculer numériquement la valeur du volume maximum V_c du ballon.

1.2.2. Exprimer la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces qui s'exercent sur le ballon-sonde à une altitude z quelconque dans l'hypothèse de l'atmosphère isotherme et de l'équilibre hydrostatique. On exprimera le résultat en fonction de m, n, M_{He}, M_a et g.

1.2.3. Montrer qu'il existe une valeur minimale n_{min} de la quantité de matière n d'hélium qui sert à gonfler le ballon au-delà de laquelle le ballon peut décoller. En déduire le volume minimum V_{min} qui permet le décollage. Calculer numériquement n_{min} et V_{min}.

1.2.4. Le ballon est gonflé avec une masse $m_{\mathrm{He}} = 9$ kg d'hélium.

1.2.4.1. Cela lui permet-il de décoller ?

1.2.4.2. Justifier brièvement pourquoi on peut considérer que lors de l'ascension du ballon, l'hélium subit une détente *adiabatique*. Par la suite on supposera que cette détente est quasi-statique.

1.2.4.3. Calculer la valeur numérique du volume initial V_0 du ballon.

1.2.4.4. Déterminer l'expression littérale et en déduire la valeur numérique la hauteur maximale z_m accessible par le ballon dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme de température T_0 (cf. 1.1.2.). Que se passe-t-il lorsque z atteint z_m ?

1.2.5. Lors de l'ascension du ballon, un système de transmission hertzienne permet de récupérer au sol les données enregistrées. La figure 1 donne le profil de variation verticale de la température relevé par le ballon-sonde dans la troposphère ($0 \text{ km} \leqslant z \leqslant 11 \text{ km}$). L'hypothèse d'une atmosphère isotherme est-elle vérifiée dans les premières couches de l'atmosphère ? Expliquer brièvement pourquoi l'air au sol est plus chaud qu'en altitude.

1.2.6. Dans la troposphère règne un gradient de température $\mathrm{d}T_a/\mathrm{d}z = -\Gamma$ constant en première approximation.

1.2.6.1. Déterminer graphiquement le gradient thermique Γ qui règne dans la troposphère.

1.2.6.2. Déterminer les expressions donnant l'évolution de la pression $p_a(z)$ et de la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air dans la troposphère.

1.2.6.3. Représenter graphiquement $p_a(z)$ et $\mu_a(z)$ en fonction de z et commenter en comparant avec le modèle de l'atmosphère isotherme.

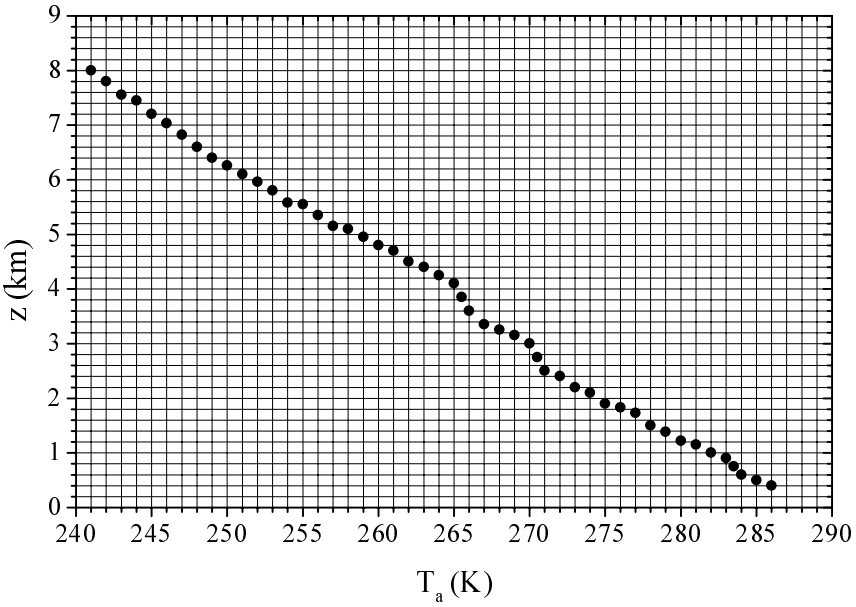


Figure 1: Profil vertical de température mesuré par le ballon-sonde.

1.3. Stabilité de l'atmosphère

On se propose d'étudier la stabilité de la troposphère terrestre dans le cadre du modèle « à gradient de température » $\mathrm{d}T_a/\mathrm{d}z = -\Gamma$ *constant*.

Pour cela, on considère un système mésoscopique constitué d'un petit volume d'air V pouvant être considéré comme infinitésimal à l'échelle macroscopique mais contenant un très grand nombre de particules d'air. V sera considéré comme un système fermé.

Le système *initialement en équilibre thermodynamique* à l'altitude z_i est élevé d'une hauteur $\mathrm{d}z$. On suppose que lors de ce déplacement le système n'échange pas de chaleur avec l'air environnant. La transformation sera de plus supposée quasi-statique.

1.3.1. Quelle relation thermodynamique relie la température T et la pression p de l'air constituant le système au cours d'une telle transformation ?

1.3.2. En différentiant la relation précédente, montrer que la variation de température $\mathrm{d}T$ du système entre les altitudes z_i et $z_i + \mathrm{d}z$ est telle que :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\Gamma_s \tag{4}$$

où Γ_s est une constante positive que l'on exprimera en fonction du rapport γ des capacités calorifiques de l'air, de la masse molaire M_a de l'air, de la constante R des gaz parfaits et de l'intensité g du champ de pesanteur.

Calculer numériquement Γ_s.

1.3.3. Exprimer la résultante $\overrightarrow{F}$ des forces à laquelle est soumis le système ainsi déplacé à l'altitude $z_i + \mathrm{d}z$ en fonction de sa masse volumique μ à l'altitude $z_i + \mathrm{d}z$, de la masse volumique μ_a de l'air environnant, du volume V et de l'intensité g du champ de pesanteur.

1.3.4. En déduire la force par unité de masse $\overrightarrow{f}$ à la quelle est soumis le système à l'altitude $z_i + \mathrm{d}z$ en fonction de la température T du système, de la température T_a de l'air environnant et de l'intensité du champ de pesanteur g.

1.3.5. Déduire de ce qui précède un critère de stabilité de l'air déplacé. Quelle est la valeur maximale de Γ permettant d'avoir de l'air stable ?

1.3.6. Établir l'équation du mouvement libre du système considéré.

1.3.7. En linéarisant l'équation du mouvement du système, déterminer la pulsation ω de son mouvement en fonction de Γ, Γ_s, g et $T_i = T(z_i)$. Application numérique : calculer ω et la période correspondante pour $z_i = 3$ km.

2ème partie

Mouvement d'un ballon-sonde

Dans cette partie, on se propose d'étudier quelques mouvements d'un ballon-sonde dans le cadre d'un modèle simplifié.

Pour cela on considère le système (*S*) constitué d'un ballon-sonde de masse $m_1 = 10$ kg [1] auquel est suspendu une nacelle de masse $m_2 = 20$ kg [2]. On note $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système (*S*). Le ballon est supposé sphérique de centre B et de diamètre *constant* $\phi = 4$ m. La nacelle est quant à elle supposée ponctuelle et centrée au point C (figure 2) tel que $BC = 3$ m. On posera par la suite $\ell_1 = BG$ et $\ell_2 = GC$.

La liaison entre le ballon et la nacelle est supposée rigide et sans masse. On supposera alors que le système (*S*) se comporte comme un solide indéformable de moment d'inertie J par rapport à l'axe $(G, \vec{u}_x)$ perpendiculaire à BC et passant par le centre d'inertie G de (*S*). Pour les applications numériques on prendra $J = 77$ kg.m^2.

En fin, on supposera que la masse volumique de l'air est constante et vaut $\mu_a = 1,3$ kg.m^{-3}.

L'atmosphère environnante du ballon-sonde est le siège d'un vent caractérisé par sa vitesse $\vec{V} = V\,\vec{u}_y$ uniforme et constante.

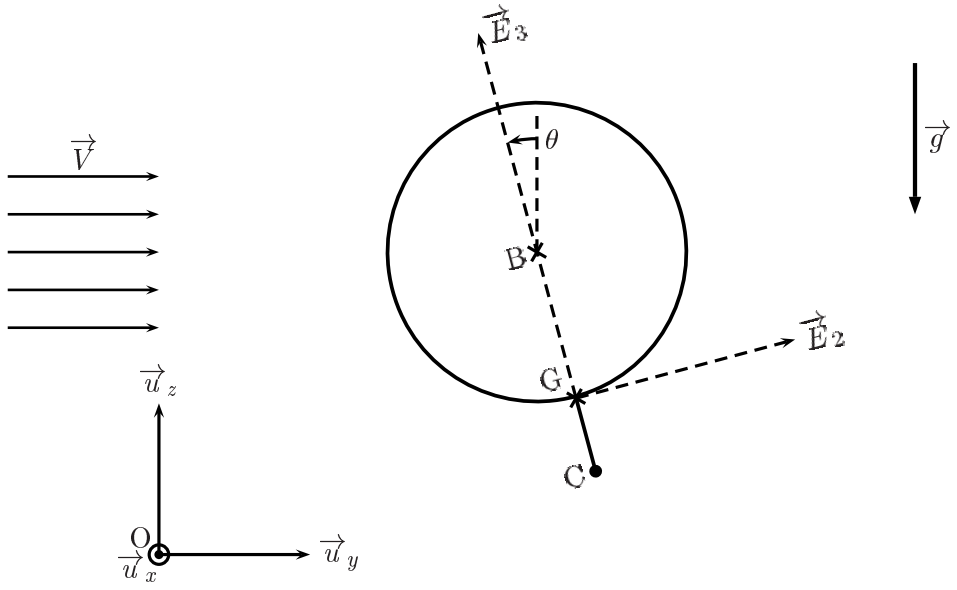


Figure 2: Ballon-sonde en mouvement dans le champ de pesanteur.

On restreint l'étude au mouvement du système (*S*) dans le plan vertical constant (yOz). Le système est repéré par les coordonnées cartésiennes (x,y,z) de son centre d'inertie G et par l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{E}_3)$.

[1] Y compris la masse du gaz ayant servi à gonfler le ballon.

[2] Y compris la masse des instruments de mesure et de transmission.

Toutes les grandeurs vectorielles demandées seront exprimées dans la base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ du repère $\mathrm{R}(\mathrm{O}, x, y, z)$ lié au référentiel terrestre R_T supposé galiléen.

2.1. Grandeurs cinématiques

2.1.1. Déterminer, littéralement puis calculer numériquement, la position du centre d'inertie G de (*S*).

2.1.2. Exprimer le vecteur rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}$ de (*S*) relativement à R_T.

2.1.3. Exprimer la vitesse $\overrightarrow{v}(\mathrm{B})$ du centre B du ballon-sonde par rapport à R_T en fonction de y, z et θ et leurs dérivées ainsi que de ℓ_1.

2.1.4. Déterminer les composantes U_x, U_y et U_z de la vitesse relative $\overrightarrow{U}$ du centre B du ballon-sonde par rapport à l'atmosphère environnante.

2.2. Bilan des forces

En plus de son poids $\overrightarrow{P}$, le système (*S*) est soumis à l'action des forces pressantes de l'atmosphère qui peut être décomposée en :

- la poussée d'ARCHIMÈDE $\overrightarrow{\Pi}_A$ (cf. 1.1.3.) dont on suppose qu'elle reste applicable en régime dynamique ;
- la force de résistance de l'air donnée par :

$$\overrightarrow{R}_a = -\frac{1}{8}\, C_x\, \pi\, \phi^2\, \mu_a\, U\, \overrightarrow{U} \tag{5}$$

où $C_x = 0,8$ u.S.I. est un coefficient positif constant appelé coefficient de traînée et $U = ||\overrightarrow{U}||$ le module de la vitesse relative du système (*S*) par rapport à l'air ambiant. On posera par la suite : $k = \frac{1}{8}\, C_x\, \pi\, \phi^2\, \mu_a$.

Dans le cadre du modèle simplifié adopté, on supposera que ces deux forces n'agissent pas sur la nacelle et que leur point d'application est le *centre* B du ballon.

2.2.1. Quelle est la dimension de C_x ? Calculer numériquement k.

2.2.2. Donner l'expression de la poussée d'ARCHIMÈDE $\overrightarrow{\Pi}_A$ agissant sur le ballon-sonde et calculer numériquement son module que l'on notera Π_A par la suite.

2.2.3. Déterminer les composantes F_x, F_y et F_z de la résultante $\overrightarrow{F}$ des efforts qui s'exercent sur le système (*S*).

2.2.4. Déterminer de même, les composantes M_x, M_y et M_z du moment résultant $\overrightarrow{M}$ en G des efforts qui s'exercent sur le système (*S*).

2.3. Équations dynamiques du mouvement

Écrire, en projection sur $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$, le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique appliqués au système (*S*) relativement au référentiel terrestre R_T.

2.4. Régime établi

On se propose d'étudier un régime particulier du mouvement du ballon-sonde pour lequel le centre de gravité G se déplace à vitesse constante et l'angle θ reste constant. Ce régime sera appelé

« régime établi » dans la suite du problème.

2.4.1. Préciser la direction de la vitesse $\overrightarrow{U}_0$ de (*S*) par rapport au vent dans ce régime et exprimer son module $U_0 = ||\overrightarrow{U}_0||$ en fonction de k, M, g et Π_A. Calculer numériquement U_0.

2.4.2. Quelle est la valeur de l'angle θ en régime établi ?

2.5. Perturbation verticale du régime établi

Le système (*S*) étant en régime établi d'ascension à la vitesse $\overrightarrow{U}_0$ constante, à l'instant pris comme origine, il rencontre une perturbation qui modifie instantanément sa vitesse verticale $\dot{z}$ de $\varepsilon_z(0)$. On se propose alors d'étudier l'influence de cette perturbation, supposée *petite*, sur le mouvement d'ascension du ballon-sonde. Pour cela on pose à un instant $t \geqslant 0$:

$$\dot{z}(t) = U_0 + \varepsilon_z(t) \tag{6}$$

et on considère $\varepsilon_z(t)$ comme petit. La perturbation étudiée ne modifie ni $\dot{y}$ ni θ.

2.5.1. Écrire l'équation différentielle dont $\varepsilon_z(t)$ est solution.

2.5.2. En linéarisant l'équation différentielle ainsi obtenue, montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_z}{\mathrm{d}t} + \frac{2\,\alpha_1}{M}\,\varepsilon_z = 0 \tag{7}$$

et donner l'expression de α_1 en fonction de k et U_0. Calculer numériquement α_1.

2.5.3. Donner l'expression de $\varepsilon_z(t)$ et commenter le résultat obtenu en discutant la stabilité du régime établi.

2.5.4. Donner l'expression d'un temps caractéristique τ de l'évolution du régime établi et calculer sa valeur numérique. Commenter.

2.6. Perturbation horizontale du régime établi

Le système (*S*) étant en régime établi d'ascension à la vitesse $\overrightarrow{U}_0$ constante, à l'instant pris comme origine, il rencontre une perturbation qui modifie instantanément sa vitesse horizontale $\dot{y}$ de $\varepsilon_y(0)$ et l'angle θ de $\varepsilon_\theta(0)$. On admet que la composante verticale de la vitesse du ballon-sonde n'est pas modifiée par la perturbation considérée.

On se propose alors d'étudier l'influence de cette perturbation, supposée *petite*, sur le mouvement d'ascension du ballon-sonde. Pour cela on pose à un instant $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = V + \varepsilon_y(t) \\ \theta = \varepsilon_\theta(t) \end{cases} \tag{8}$$

et on considère $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_\theta(t)$ comme petits.

2.6.1. Vérifier, qu'au premier ordre non nul, le module U de $\overrightarrow{U}$ n'est pas modifié par la perturbation.

2.6.2. En linéarisant les équations différentielles dont $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_\theta(t)$ sont les solutions montrer que :

$$\begin{cases} M\,\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_y}{\mathrm{d}t} + \alpha_1\,\varepsilon_y = \alpha_2\,\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_\theta}{\mathrm{d}t} \\ J\,\dfrac{\mathrm{d}^2\varepsilon_\theta}{\mathrm{d}t^2} + \alpha_3\,\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_\theta}{\mathrm{d}t} + \alpha_4\,\varepsilon_\theta = \alpha_2\,\varepsilon_y \end{cases} \tag{9}$$

et donner les expressions des constantes α_1, α_2, α_3 et α_4 en fonction de k, U_0, ℓ_1, M et g. Calculer numériquement ces constantes.

2.6.3. On cherche des solutions de (9) sous forme harmonique telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon_y(t) = A \exp \omega\, t \\ \varepsilon_\theta(t) = B \exp \omega\, t \end{cases} \tag{10}$$

où A, B et ω sont trois constantes réelles ou complexes.

2.6.3.1. Montrer que A et B sont quelconques et ω est solution de l'équation de troisième degré :

$$\omega^3 + C_1\,\omega^2 + C_2\,\omega + C_3 = 0 \tag{11}$$

et donner les expressions littérales et calculer les valeurs numériques des constantes C_1, C_2 et C_3.

2.6.3.2. La résolution numérique de (11) donne les solutions :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{1}{\tau_1} \\ \omega_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} + \mathrm{i}\,\Omega \\ \omega_3 = -\dfrac{1}{\tau_2} - \mathrm{i}\,\Omega \end{cases} \tag{12}$$

avec $\tau_1 = 0,30$ s, $\tau_2 = 3,14$ s et $\Omega = 1,70\ \mathrm{s}^{-1}$.

En déduire la solution générale de (9) en déterminant les constantes d'intégration à l'aide de conditions initiales adéquates que l'on précisera.

2.6.3.3. Interpréter les solutions obtenues et discuter de la stabilité horizontale du mouvement du ballon-sonde dans le régime établi. Quel est le temps Δt au bout duquel l'effet de la perturbation horizontale se dissipe à 99% ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Fonctions usuelles et lecture des graphes
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi