Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2007, filière PSI

Mathématiques II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- 1ère Partie
- 2ème Partie
- 3ème Partie

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2007/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **PSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \ldots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ et α_n sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

1ère Partie

1. Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de $a,\ b,\ c$ et d.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\},\ a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$.

   (b) Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

4. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \ldots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \ldots, v_n$ celles de V. On pose $A = U{}^tV$.

   (a) Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.

   (b) Que vaut la trace de A ?

   (c) Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \ldots, v_n$ et U.

   (d) On suppose que $U = 0$ et $V = 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

5. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) = 0$

   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

(c) En déduire que $A = X\,{}^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

(d) On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.

7. (a) Soient $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1, \ldots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_p$ sont tous nuls.

(b) En déduire que si $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i\,{}^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.

8. (a) Montrer que l'application $<,>$: $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices X^tY et X'^tY' sont-elles orthogonales dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$?

(c) En déduire une méthode de construction de familles orthonormées, de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$, de la forme $(X_i^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2ème Partie

Soit $A = U^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

3. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.

4. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

(b) On suppose que $\alpha = 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

(c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

5. Montrer que si $\alpha = 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha)$.

6. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

(a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

(b) Montrer que $U \in \mathrm{Ker}\, f$ et justifier l'existence d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W)$.

(c) Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

(d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3ème Partie

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^c sa comatrice, c'est à dire la matrice de terme général $A_{i,j}$, cofacteur de $a_{i,j}$ dans A. On rappelle que

$$A\,{}^tA^c = {}^tA^cA = \det A\, I_n.$$

On admet les deux résultats suivant :

• *Si le rang de A est égal à $r > 0$ alors il existe une sous-matrice de A qui est inversible d'ordre r.*

• *S'il existe une sous-matrice de la matrice A, qui soit d'ordre $r > 0$ et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r.*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Si A est de rang n, montrer que A^c est aussi de rang n. Exprimer A^c à l'aide de l'inverse A^{-1} de A.
   (b) Si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$, montrer que la matrice A^c est nulle.
2. On suppose ici que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $n-1$.
   (a) Justifier que $\mathrm{rg}(A^c) \geqslant 1$.
   (b) Soit f (resp. g) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (resp. ${}^tA^c$). Montrer que $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ et conclure que que $\mathrm{rg}(A^c) = 1$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que le polynôme caractéristique P_A de A vérifie

   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad P_A(t) = \det(A - tI_n).$$

   On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on rappelle que le déterminant de toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au déterminant relativement à la base $\mathcal{B}$ du système de vecteurs formé par les colonnes $C_1(B), \ldots, C_n(B)$ de la matrice B :

   $$\det B = \det{}_{\mathcal{B}}(C_1(B), \ldots, C_n(B)).$$

   (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \det{}_{\mathcal{B}}(C_1(A) - te_1, \ldots, C_n(A) - te_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   (b) Justifier alors que $P'_A(0) = -\mathrm{Tr}(A^c)$.
4. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que A et B ont la même trace, le même rang et le même polynôme caractéristique.
   (b) En déduire que A^c et B^c ont la même trace.
   (c) Montrer que si A est de rang n, alors A^c et B^c sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Que peut-on dire si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$?
   (e) On suppose que $\mathrm{rg}(A) = n-1$.
      i. Montrer que si $\mathrm{Tr}(A^c) = 0$/alors alors A^c et B^c sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Montrer que si $\mathrm{Tr}(A^c) = 0$, alors alors A^c et B^c sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi