Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2018, filière PSI

Physique II

Ce que traite le sujet

- I Raies spectrales de l'hydrogène
- II Étude d'un spectre de raies à l'aide d'un réseau
- III Étude d'un spectre de raies à l'aide d'un prisme
- IV Modélisation de l'indice de réfraction d'un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2018/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

• On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordes.

• Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.

• Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Les différentes parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.

• *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Spectroscopie visible

Les électrons d'un atome occupent des orbites bien déterminées caractérisées par des énergies caractéristiques et discontinues. Lorsqu'un électron passe d'une orbite à une autre plus proche du noyau il y' a émission de rayonnements, donc de photons, de fréquence bien déterminée. La spectroscopie étudie les raies d'émission d'une matière donnée ; elle utilise des systèmes dispersifs comme les réseaux et les prismes. Les prismes sont faits à l'aide de milieux matériels dispersifs dont l'indice de réfraction $n(\lambda)$ dépend de la longueur d'onde du rayonnement qui les traverse.

Donnes :

-Masse de l'électron $m = 9,1.10^{-31}kg$.

-Charge de l'électron $q = -e = -1,6.10^{-19}C$.

- Nombre d'Avogadro $N_A = 6,02.10^{23}$

-Vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 m.s^{-1}$.

- Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} F.m^{-1}$.

-Constante de Planck : $h = 6.62.10^{-34} J.s$

- A une grandeur sinusoïdale $f(t) = F_0.cos(\omega t + \varphi)$, on associe le complexe souligné $\underline{f}(t) = F_0.e^{i.(\omega t+\varphi)}$, avec $i^2 = -1$ et tel que $f(t) = Re(\underline{f}(t))$; le conjugué de $\underline{f}$ sera noté $\underline{f}^*$.

- Formule d'analyse vectorielle pour un vecteur $\overrightarrow{V}$: $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{grad}(div\,\overrightarrow{V})$ - $\Delta\,\overrightarrow{V}$.

I Raies spectrales de l'hydrogène

On se propose d'interpréter le spectre de rayonnements discret émis par les atomes en général, mais pour simplifier on étudiera celui de l'atome d'hydrogène. On suppose que c'est un système isolé formé d'un proton (noyau) et d'un électron ; la masse du proton est $m_p = 1836.m$.

I.1. Modèle classique de Rutherford pour l'atome d'hydrogène.

Dans le référentiel galiléen R(OXYZ) centré sur le proton, fixe au point O, on repère le mouvement de l'électron par $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u}_r$ dans la base de travail cylindrique $\left\{\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\right\}$. Il est soumis à la force électrique $\overrightarrow{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\overrightarrow{u}_r$; on posera $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$, de valeur numérique $k = 2,30.10^{-28} SI$.

I.1.1. Montrer que la trajectoire de l'électron est plane.

I.1.2. On suppose que la trajectoire de l'électron autour du noyau est circulaire de rayon r.
Exprimer les vecteurs : vitesse $\overrightarrow{v}$, accélération $\overrightarrow{a}$ et moment cinétique en O $\overrightarrow{L}_O$.

I.1.3. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(r)$, on prendra $E_p(r \to \infty) = 0$.

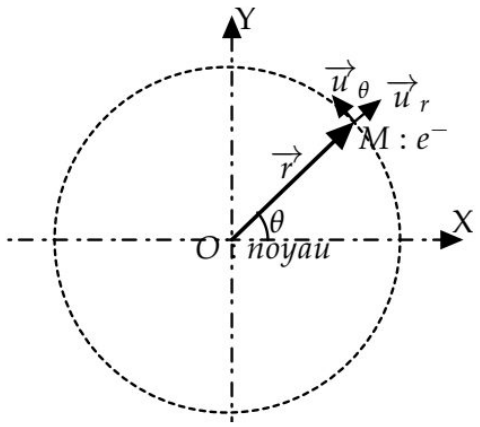


Figure 1 – L'atome d'hydrogène

I.1.4. Donner l'expression de l'énergie mécanique $E(r)$ en fonction de k et r.

I.2. Insuffisances du modèle classique de l'atome d'hydrogène.

L'électromagnétisme classique, prévoit que l'électron d'accélération $\overrightarrow{a}$ rayonne, et perd, de l'énergie ; il devrait, alors, tomber sur le noyau au bout d'une durée τ.

I.2.1. Donner l'expression du dipôle électrique $\overrightarrow{p}$ constitué par l'électron et le proton.

I.2.2. Montrer que ce système est équivalent à deux dipôles $\overrightarrow{p}_1 = p_1(t).\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{p}_2 = p_2(t).\overrightarrow{u}_y$. On donne $p_1(t) = p_0.cos(\omega.t)$, déterminer les expressions de p_0 et de $p_2(t)$. La base cartésienne est notée $\{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z\}$.

En un point M du plan XOY, tel que $OM = r' \gg r$ le dipôle $\overrightarrow{p}_1$ crée une onde supposée localement plane, de champ électrique $\overrightarrow{E}_1(M,t)$ et de champ magnétique $\overrightarrow{B}_1(M,t)$.

I.2.3. Situer, simplement, les vecteurs $\overrightarrow{E}_1(M,t)$ et $\overrightarrow{B}_1(M,t)$ par rapport à ce plan XOY.

I.2.4. Situer également le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\pi}_1(M,t)$.

La puissance moyenne rayonnée par l'électron est de la forme : $P_r = \frac{2}{3}.\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}.\overrightarrow{a}^2$, donc l'énergie diminue ainsi que le rayon r. On donne $\frac{m}{k} = 3,95.10^{-3}SI$.

I.2.5. Exprimer, puis déterminer la "durée de vie" *tau* de l'atome d'hydrogène, sachant que le rayon initial est $r = 53,3pm$. Commenter.

I.3. Modèle semi-quantique de Bohr (1885-1962, Nobelisé en 1922)

Expérimentalement on avait établi qu'un atome excité, était capable de rayonner une onde électromagnétique. Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde λ_{pq} caractéristiques de ces rayonnements vérifient la loi expérimentale de Balmer-Rydberg : $\frac{1}{\lambda_{qp}} = R_H.(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2})$ où p et q sont des entiers non nuls ($p < q$) et R_H est la constante de Rydberg. .

On souhaite retrouver théoriquement ce résultat pour l'atome d'hydrogène.

En tenant compte de résultats connus en 1913, Bohr a introduit deux hypothèses :

- La relation entre l'énergie E et la fréquence ν_{qp} du rayonnement émis : $E = E_q - E_p = h.\nu_{qp}$.
- Le moment cinétique est quantifié : $L_O = n.\hbar$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}SI$.

I.3.1. D'après la relation de quantification déterminer le rayon r_n de l'orbite circulaire de l'électron en fonction de m , k, $\hbar$ et n.

I.3.2. Calculer le rayon de Bohr de l'atome H dans son état fondamental : r_1.

I.3.3. Déterminer l'expression de l'énergie $E_n(r_n)$ en fonction de E_0 et n ; on donnera l'expression et l'unité de la constante E_0.

I.3.4. En déduire l'interprétation de la loi expérimentale de Balmer-Rydberg, et donner l'expression de la constante de Rydberg R_H en fonction de m, e, c, ε_0 et h.

I.3.5. Déterminer en eV l'énergie d'ionisation de l'atome H.

I.3.6. On généralise la dualité onde-corpuscule à l'électron, et on lui associe une longueur d'onde λ. Ainsi d'après de De Broglie , la quantité de mouvement de l'électron est : $p_e = \frac{h}{\lambda}$.
Montrer qu'alors $2\pi.r_n = n.\lambda$, $n \in \mathbb{N}^*$. Interpréter cette relation en terme d'onde.

I.3.7. Dans cette question on tient compte du mouvement du noyau atomique.

I.3.7.1. Déteminer R'_H la nouvelle expression de la constante de Rydberg si l'on tient compte de la mobilité du noyau.

Le deutérium, noté D, de masse m_D est un isotope de l'hydrogène H, et leur spectres sont décalés. Soient λ_H et λ_D les longueurs d'onde des photons émis, respectivement, par l'hydrogène et par le deutérium, dans une transition entre deux niveaux d'énergie caractérisés par les mêmes nombres p et q.

I.3.7.2. Calculer le rapport $\frac{m_p}{m_D}$ en fonction de $\frac{\lambda_H - \lambda_D}{\lambda_H}$ et $\frac{m_p}{m}$, $m_D \gg m$.

I.3.7.3. En déduire la charge et la masse de l'autre particule que contient le noyau du deutérium. Application numérique : $\lambda_H = 656.11nm$ et $\lambda_D = 655,93nm$.

I.3.7.4. Comment pourrait-on déterminer l'abondance relative du deutérium par rapport à l'hydrogène.

II Étude d'un spectre de raies à l'aide d'un réseau

On considère le montage optique formé d'une source ponctuelle S, d'un réseau de diffraction par transmission, de deux lentilles L_1 et L_2 convergentes et d'un écran. Il illustre le principe de diffraction à l'infini, sous une direction θ, d'une onde plane de longueur d'onde λ arrivant sous une incidence $i = 0$ sur un réseau ; ce dernier est un diaphragme comportant N fentes très fines $S_{k,k=1,2,..,N}$ espacées d'un pas $a = S_iS_{i+1}$: voir figure 2. On étudie l'intensité diffractée $I(y)$ en tout point $M(y)$ d'un écran placé dans le plan focal image de la lentille L_2.

II.1. Rappeler le principe de diffraction de Huyghens-Fresnel

II.2. Recopier la figure 2 et tracer les deux rayons issus de S et arrivant sur les fentes S_0 et S_1 ; puis les compléter par deux rayons diffractés par S_0 et S_1 et aboutissant au point M.

II.3. Déterminer, avec justification, la différence de marche optique $\delta(M)$ entre deux diffractés parallèles par deux fentes successives, dans la direction θ vers l'infini.

II.4. Que peut on dire de l'intensité en M dans le cas où $\delta(\theta) = n.\lambda$, avec $n \in \mathbb{Z}$?

II.5. Donner les directions $\theta_{max,n}$ correspondant aux maximas d'intensité.

La source S est une lampe spectrale à hydrogène. On considère les raies correspondant aux transitions d'électron de l'atome d'hydrogène qui mettent en jeu les raies visibles de Balmer $p = 2$.

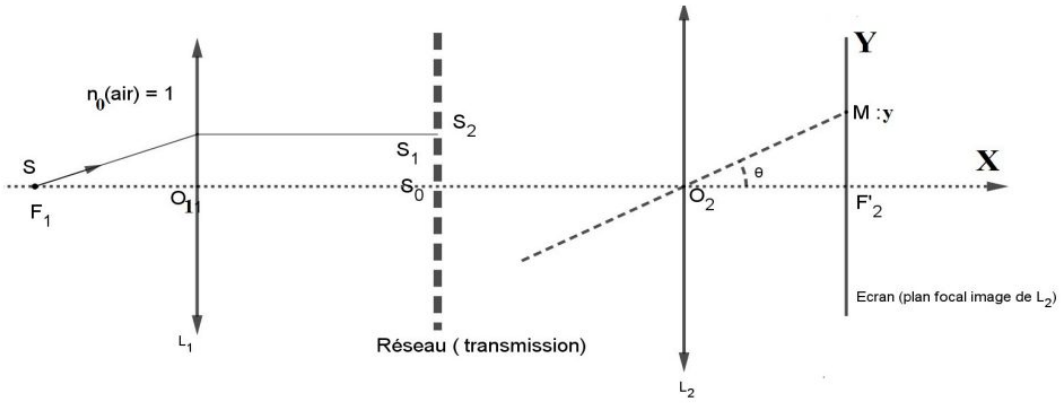


Figure 2 – Principe d'étude de la diffraction par un réseau

II.6. Montrer qu'on a quatre raies dans le spectre visible de longueur d'onde : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$, et donner les couleurs des raies extrêmes. On donne : $\frac{1}{R_H} = \lambda_0 \approx 91.2nm$.

II.7. Lors de la diffraction par un réseau, préciser avec justification la raie la plus déviée.

II.8. A-t-on chevauchement (recouvrement) des spectres ? Si oui, pour quel(s) ordre(s) ?

II.9. Dans cette question, on considère le cas où l'angle d'incidence i est non nul. Le réseau est monté sur un goniomètre. On considère la diffraction à l'infini dans la direction θ, les maximas d'intensité sont donnés par la relation $a.(sin(i) - sin(\theta)) = n.\lambda$, $n \in \mathbb{Z}$: voir figure 3.

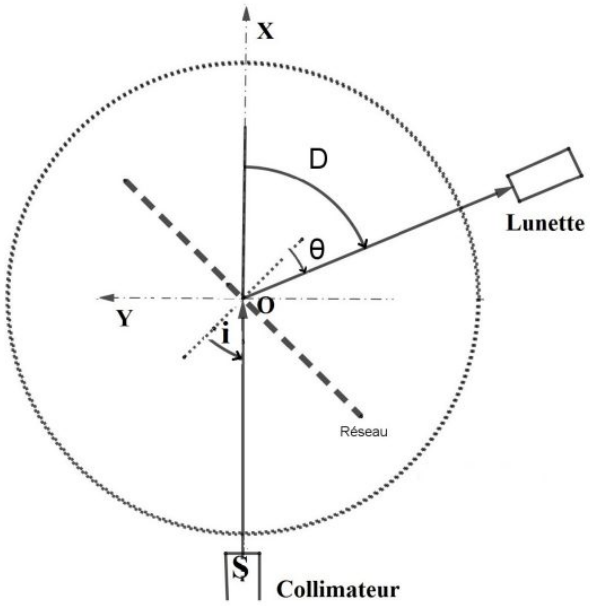


Figure 3 – Minimum de déviation pour la diffraction par un réseau

II.9.1. Exprimer l'angle de déviation D entre la direction initiale et la direction d'observation θ.

II.9.2. Pour un ordre donné et une longueur d'onde donnée λ_j, on fait tourner le réseau autour de l'axe OZ, la source étant fixe. Montrer que D passe par un minimum D_m pour $i = i_m$.

II.9.3. Montrer qu'on a, alors, $sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = -\frac{n.\lambda_j}{2a}$.

II.9.4. Avec le réseau $600 traits/mm$, on étudie le minimum de déviation pour la raie verte λ_{ve} d'une lampe à mercure ; on obtient $D_m = -18°52'$ à l'ordre 1, déterminer la valeur de λ_{ve}.

III Étude d'un spectre de raies à l'aide d'un prisme

III.1. Rappeler les deux lois de Descartes de réflexion et celles relatives à la réfraction.

III.2. On considère deux milieux homogènes d'indices n_1 et $n_2 > n_1$. Expliquer dans quels cas on observe les phénomènes de la réfraction limite et de la réflexion totale. On introduira l'angle : $\psi = arcsin(\frac{n_1}{n_2})$.

Un prisme d'indice $n_2(\lambda)$ permet d'étudier une lumière polychromatique issue d'une lampe spectrale. Dans la figure 4, on raisonnera d'abord un rayon lumineux monochromatique qui arrive sous une incidence i sur la face AB d'un prisme de section droite triangulaire ABC. Ce rayon émerge par la face AC sous l' angle i' avec la normale. On note par r et r' les angles respectifs avec les normales aux faces du prisme en I et en J. On appelle déviation l'angle (positif) $D = |\widehat{JK, SI}|$

.

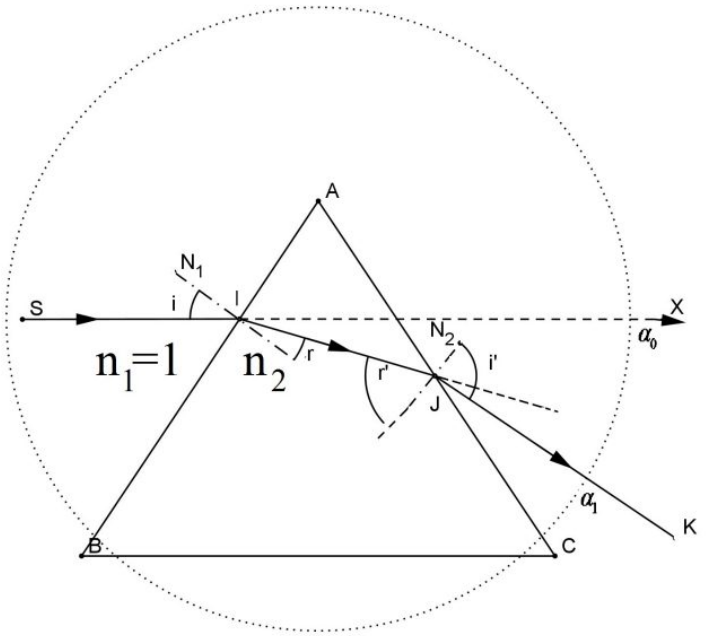


Figure 4 – Angle de déviation à la traverse d'un prisme

III.3. Donner les relations de réfraction en I et J notées respectivement (1) et (2).

III.4. Exprimer l'angle du prisme A et l'angle de déviation en fonction des angles i, r, r' et i' ; on notera ces relations par (3) et (4) respectivement.

III.5. Déterminer la condition sur A pour avoir un émergent par la face AC.

III.6. Déterminer la condition sur i pour avoir un émergent par la face AC.

III.7. Dans le dispositif expérimental usuel, un faisceau lumineux très fin d'une lampe spectrale, arrive sous une incidence i sur un prisme de verre. La mesure des angles se fait par un goniomètre.

III.7.1. Donner deux exemples de lampes spectrales usuellement utilisées.

III.7.2. Avec quelle précision mesure t-on usuellement les angles au goniomètre ?

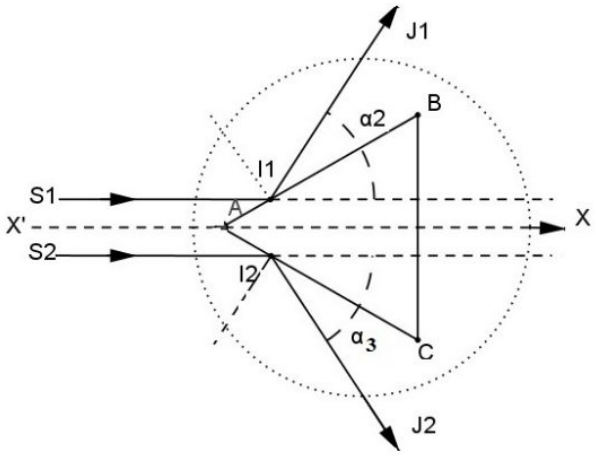


Figure 5 – Mesure de l'angle A du prisme

III.7.3. Pour mesurer l'angle A (figure 5), on fait tomber sur le sommet A un faisceau parallèle et on repère les directions des deux réfléchis par les faces AB et AC.
Déterminer l'angle du prisme A en fonction de α_2 et α_3.
On donne : $\alpha_2 = 59°36'$ et $\alpha_3 = 60°10'$, déterminer la valeur de A.

III.7.4. Lorsqu'on fait varier l'angle i, on constate que l'angle de déviation pour une raie de longueur d'onde λ_k passe par un minimum D_{m,λ_k} pour $i = i_{0,\lambda_k}$. Montrer que $i_{0,\lambda_k} = \frac{D_{m,\lambda_k}+A}{2}$.

III.7.5. En déduire que l'indice du prisme est donné par la relation : $n(\lambda_k) = \frac{sin\left(\frac{(D_{m,\lambda_k}+A)}{2}\right)}{sin(\frac{A}{2})}$.

III.7.6. A l'aide de schéma(s), expliquer comment on procède pratiquement pour mesurer D_{m,λ_k} avec précision. Peut-on, aussi, faire arriver le rayon incident sur la face AC ? Expliquer.

III.7.7. L'indice du prisme est modélisé par la formule de Cauchy $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ où a et b sont deux constantes positives. Pour la lumière blanche, indiquer la couleur la plus déviée par le prisme et comparer au cas du réseau.

IV Modélisation de l'indice de réfraction d'un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope

On se propose de modéliser l'interaction de la lumière (onde électromagnétique) avec un milieu diélectrique, lorsqu'elle s'y propage ; on utilisera le modèle de Lorentz de "l'électron élastiquement lié". Dans un référentiel galiléen R(OXYZ), on repère un électron du diélectrique par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$, et on étudie son mouvement sous l'action des forces :

- Force de rappel (élastique) : $\overrightarrow{F}_r = -m\omega_0^2.\overrightarrow{r}$, avec ω_0 : constante positive ;
- Force de frottement fluide $\overrightarrow{F}_f = -\frac{m\omega_0}{Q}.\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$, avec Q : constante positive ;
- Force dûe au champ électrique de l'onde $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0.cos(\omega.t).\overrightarrow{u}_x$ supposé uniforme.

IV.1. A l'aide d'ordres de grandeurs, justifier le fait qu'on puisse supposer le champ électrique de l'onde $\overrightarrow{E}(M,t)$ uniforme à l'échelle d'un atome.

IV.2. Justifier qu'on puisse négliger la force magnétique de l'onde.

IV.3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'électron, déterminer l'équation différentielle du mouvement en projection selon $\overrightarrow{u}_x$.

IV.4. En supposant que le déplacement de l'électron est harmonique et peut s'écrire en notation complexe $\underline{x} = \underline{x_0}.e^{i\omega t}$, déterminer l'expression de $\underline{x_0}$.

IV.5. En déduire les expressions du moment dipolaire $\overrightarrow{\underline{p}}$ et celle du vecteur polarisation, ou moment dipolaire par unité de volume, $\overrightarrow{\underline{P}}$ (en $C.m^{-2}$) en supposant qu'il y'a N atomes par unité de volume et un électron par atome.

IV.6. La susceptibilité complexe $\underline{\chi}$ est définie par $\overrightarrow{\underline{P}} = \varepsilon_0.\underline{\chi}.\overrightarrow{\underline{E}}$.

On pose : $\chi_0 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}$, $s = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{\chi} = \chi_r - i.\chi_i$. Donner les expressions de $\chi_r(s)$ et $\chi_i(s)$.

On montre que les relations de Maxwell ont même forme que dans le vide

(1) $div\,\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = 0$ (2) $div\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = 0$

(3)$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = -\dfrac{\partial\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t)}{\partial t}$ (4) $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \mu_o.\varepsilon_0.\underline{\varepsilon_r}.\dfrac{\partial\,\overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t}$

avec $\underline{\varepsilon_r} = 1 + \underline{\chi}$: permittivité complexe du diélectrique.

IV.7. Établir l'équation de D'Alembert vérifiée par $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)$.

On considère une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation ω caractérisée par son champ électrique complexe : $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = E_0.e^{i.(\omega.t - \frac{\omega}{c}\underline{n}.z)}.\overrightarrow{u}_x$, où $\underline{n}$ est l'indice complexe.

IV.8. En déduire la relation de 'dispersion' liant $\underline{n}^2$ à $\underline{\chi}$.

On écrit l'indice complexe du milieu sous la forme : $\underline{n} = n_r - i.n_i$.

IV.9. Donner l'expression réelle du champ électrique $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)$ en faisant intervenir n_r et n_i.

IV.10. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ.

IV.11. Déterminer l'expression réelle du champ magnétique de cette onde $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t)$.

IV.12. Cette onde électromagnétique est-elle plane ? est-elle transverse électromagnétique (TEM) ?

IV.13. Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting : $< \overrightarrow{\Pi} >$.

IV.14. Donner l'expression de la puissance moyenne rayonnée par unité de surface $\varphi(z)$.

IV.15. On considère une onde de longueur d'onde $\lambda = 500nm$ qui se propage dans l'eau. Le flux surfacique moyen $\varphi(z)$ à la profondeur de 12 m est le dixième de sa valeur près de la surface de l'eau, calculer l'indice n_i de l'eau. Commenter.

IV.16. On se place dans le cas $|\,\underline{\chi}\,| \ll 1$.

IV.16.1. Déterminer les expressions de n_r et n_i en fonction de χ_r et χ_i

IV.16.2. Faire une étude asymptotique de n_r et n_i pour les trois cas : $s \to 0$, $s \approx 1$ et $s \to \infty$.

IV.17. Montrer que lorsqu'on néglige les termes de frottements, l'indice du milieu $n(\omega) = \frac{c}{v_\varphi}$ peut être donné par la formule de Sellmeier : $n^2 = 1 + \dfrac{A.\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$, où A est une constante à exprimer.

IV.18. Dans le cas des faibles fréquences, montrer que l'indice de réfraction est décrit par la formule de Cauchy $n(\lambda) = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$ où a et b sont deux constantes à exprimer.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Optique géométrique et formation des images
- Mesures et incertitudes
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Régime sinusoïdal forcé

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi