Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2020, filière PSI

Mathématiques (épreuve unique)

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : fonction définie par une intégrale
- Exercice 2 : série de fonctions et calcul de sa somme
- Problème, 1re partie : exemple pour n = 3
- Problème, 2e partie : généralités sur les matrices de permutation
- Problème, 3e partie : diagonalisation d'une matrice de permutation d'ordre n

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

L'en-tête de cette copie porte « Session 2010 » : c'est bien le sujet de l'épreuve unique de mathématiques de 2020, comme le confirment son corrigé et le sujet MP de la même session, qui a les deux mêmes exercices. Quelques coquilles de frappe figurent dans le texte (« Monter », « parmutation »).

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2020/maths-unique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI,
comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité. Chacun des deux exercices est noté sur **4 points sur 20**, *le problème est noté* **12 points sur 20**.

Exercice 1

Étude d'une fonction définie par une intégrale.

1. Montrer que pour tout réel x, la fonction $t \to e^{tx-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Dans la suite de cet exercice , on note f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2} dt$$

3. Montrer que $f'(0) = 0$.

4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + xf'(x) = 2f''(x)$.

5. En déduire que, pour tout réel x, $xf(x) - 2f'(x) = 0$.

6. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 2

Étude d'une série de fonctions et calcul de sa somme

On considère la suite$(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Dans la suite, on notera g sa somme sur $[0, +\infty[$ *:* $\displaystyle g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}, \quad x \geqslant 0.$

2. Justifier que g est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$

3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

4. En admettant que $g(0) = \ln(2)$ donner une expression simple de l'aide de fonctions usuelles.

Problème

Á propos de matrices de permutations

Notations

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$,à n lignes et p colonnes.

Si $p = n$, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ se note I_n.

Pour toute matrice A de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et $\mathrm{rg}\,(A)$ son rang ; si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}\,(A)$ désigne la trace de A, χ_A son polynôme caractéristique et a^{-1} représente l'inverse de A si elle est inversible ; on rappelle

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det\,(xI_n - A)$$

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, inversibles et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ sur lui même ; les éléments de $\mathcal{S}_n$ s'appellent aussi des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f_\sigma\,(e_k) = e_{\sigma(k)},$$

où $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

De même, on note P_σ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

dite *matrice de la permutation* σ, où pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker égale à 1 si $i = j$ et 0 sinon.

1ère partie

Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

On note $\sigma \in \mathcal{S}_3$ la permutation définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, cela vaut dire que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$.

1.1. Inversibilité et inverse de P_σ

1.1.1. Expliciter la matrice $P_\sigma \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ puis exprimer la matrice de l'endomorphisme f_σ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ en fonction de P_σ.

1.1.2. Vérifier que l'endomorphisme f_σ est bijectif et en déduire que la matrice P_σ est inversible.

1.1.3. Calculer ${}^tP_\sigma P_\sigma$ et en déduire l'inverse de P_σ.

1.2. Diagonalisation de P_σ.

1.2.1. Vérifier que $P_\sigma^3 = I_3$.

1.2.2. Monter alors que la matrice P_σ est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

1.2.3. Calculer les valeurs propres de la matrice P_σ ainsi qu'une base de vecteurs propres associés.

1.2.4. On note Q la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que Q est inversible puis justifier que la matrice $Q^{-1}P_\sigma Q$ est diagonale en précisant ses éléments diagonaux.

2ème partie

Quelques généralités sur les matrices de permutations

Dans cette partie, σ désigne un élément quelconque de $\mathcal{S}_n$.

2.1. Inversibilité d'une matrice de permutation

2.1.1. Exprimer la matrice de l'endomorphisme f_σ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de la matrice P_σ.

2.1.2. Justifier que l'endomorphisme f_σ est bijectif puis en déduire que la matrice P_σ est inversible.

2.2. Transposée d'une matrice de permutation

2.2.1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer, selon i et j, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}\delta_{k,\sigma(j)}$. On pourra distinguer les cas $i=j$ et $i \neq j$.

2.2.2 En déduire que ${}^tP_\sigma P_\sigma = I_n$ puis exprimer l'inverse de la matrice P_σ en fonction de sa transposée. Que peut-on alors dire de la matrice P_σ ?

2.3. Structure de l'ensemble des matrices de permutations.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma\ ;\ \ \sigma \in \mathcal{S}_n\}$.

2.3.1. Soit σ et σ' deux éléments de $\mathcal{S}_n$. Exprimer $f_\sigma \circ f_{\sigma'}$ en fonction de $f_{\sigma\circ\sigma'}$ puis en déduire que

$$P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$$

2.3.2. On rappelle que σ^{-1} désigne l'inverse de la permutation σ. Justifier que l'inverse de la matrice P_σ est la matrice $P_{\sigma^{-1}}$: $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

3ème partie

Diagonalisation d'une matrice de parmutation d'ordre n

On considère la matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.1 Vérifier que A est la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définie par :

$$\sigma(1) = n,\ \sigma(2) = 1,\ \sigma(3) = 2, \cdots, \sigma(n) = n-1.$$

3.2 Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$

3.2 Que peut-on alors dire de la matrice A ?

3.4 On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}$, $k \in [\![0,n-1]\!]$. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $AV_k = w^k V_k$.

3.5 En déduire une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de la matrice A.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Séries numériques et vectorielles
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi