Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2021, filière PSI

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Partie 1 : développement asymptotique de la suite (Hn)
- Partie 2 : deux exemples de séries de fonctions
- Partie 3 : calcul d'une intégrale
- Partie 4 : application à la loi de Gumbel

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2021/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⵜⴰⵏⴰⵡⴰⵔⵜ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⵜⴰⵙⵙⵓⵏⴰⵍⵜ
ⴰⵙⵓⵎⵔ ⵏ ⵜⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴰⵙⵓⵔⵙ ⵏ ⵜⵙⴳⵎⵉ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التجهيز و النقل و اللوجستيك و الماء
Ministère de l'Equipement, du Transport, de la Logistique et de l'Eau

المدرسة الحسنية للأشغال العمومية
Ecole Hassania des Travaux Publics

CNC 2021

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Épreuve de **Mathématiques I**

Filière : **PSI**

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de la page de garde

L'usage de tout document et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

1. a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = 1$.

   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x^n e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}dx$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

5. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{7}(x + x^3)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Déterminer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

   b) Déterminer la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Problème

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

Partie 1
Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$

1. a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \sim \frac{1}{2n^2}$.

   b) En déduire que $\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

   c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

   d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

   e) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

   a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

   b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

   c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

   a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

   b) Vérifier que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{2}{n^3}$ puis que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$.

   c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Partie 2
Étude de deux exemples de séries de fonctions

On considère la fonction réelle ζ définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $]0, +\infty[$ les fonctions réelles φ_n et ψ_n par,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x de $]0, +\infty[$,

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \psi_n(x)$$

   b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   On note ainsi, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

c) Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.

d) On considère la fonction K définie sur $]1,+\infty[$ par $K(x)=\zeta(x)+\dfrac{1}{1-x}$.

i) Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $K(x)=\varphi(x)$.

ii) En déduire que la fonction K admet une limite finie quand x tend vers 1 à droite.

iii) En déduire que $\zeta(x)\sim\dfrac{1}{x-1}$ au voisinage de 1 à droite.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par,

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On définit ainsi, la fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$? Justifier votre réponse.

c) Montrer que pour tout réel strictement positif a, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, où f_n' désigne la dérivée de la fonction f_n.

d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n^x}$$

3. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x}=\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x}=\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^x}$$

c) En déduire que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $f(x)=(2^{1-x}-1)\zeta(x)$.

4. a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $(2^{1-x}-1)$, lorsque x tend vers 1 à droite.

b) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$, lorsque x tend vers 1 à droite.

c) Déterminer les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.

Partie 3
Calcul d'une intégrale

On se propose de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-\ln u)e^{-u}du$.

On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$I_{n,k}=\int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^k du \quad\text{et } I_n=I_{n,n}$$

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k,
$$I_{n,k} = I_{n,k-1} + \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,
$$\frac{k+1}{k} I_{n,k} = I_{n,k-1} - \frac{n}{k(k+1)}$$

3. On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k, $J_{n,k} = (k+1)I_{n,k}$.
   a) Déterminer pour tous entiers naturels non nuls n et k, une relation entre $J_{n,k}$ et $J_{n,k-1}$.
   b) En déduire pour tout entier naturel non nul n, I_n en fonction de n et u_n.

4. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel u dans $[0,n]$,
$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$$
   b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n (-\ln u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u)e^{-u}du$.
   c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} (-\ln u)e^{-u}du$.

Partie 4
Application à la loi de Gumbel

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \exp(-t - e^{-t})$.

1. a) Montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et donner sa valeur, (on pourra utiliser la fonction $t \mapsto \exp(-e^{-t})$).
   b) Justifier que g est une densité d'une variable aléatoire qu'on notera X. La loi suivie par X est appelée loi de Gumbel.
   c) Déterminer F_X la fonction de répartition de X.

2. a) Justifier que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$.
   b) À l'aide d'un changement de variable, déterminer la valeur de $E(X)$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, ($\lambda > 0$) si elle admet pour densité la fonction θ définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
   On pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $G_n = M_n - \ln(n)$. On note F_{M_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n et F_{G_n} celle de la variable aléatoire G_n.
   a) Déterminer F_{X_1} la fonction de répartition de X_1.
   b) Déterminer la fonction F_{M_n}.
   c) En déduire la fonction F_{G_n}.

4. Montrer que la suite $(M_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers X.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles
- Nombres réels et suites numériques

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi