Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2021, filière PSI

Mathématiques II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème 1, partie 1 : puissances de la matrice Ma
- Problème 1, partie 2 : commutant de Ma
- Problème 2, partie 1 : matrice à n valeurs propres distinctes
- Problème 2, partie 2 : matrice symétrique réelle positive

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2021/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⵜⴰⵏⴰⵎⵓⵔⵜ ⵜⴰⵙⵙⵓⵏⴼⵍⵜ
ⴰⵙⵙⵉⵏⵉⵖⵍ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⵜⴰⵙⵙⵓⵏⴼⵍⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التجهيز و النقل و اللوجستيك و الماء
Ministère de l'Equipement, du Transport, de la Logistique et de l'Eau

المدرسة الحسنية للأشغال العمومية
Ecole Hassania des Travaux Publics

CNC 2021

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Épreuve de **Mathématiques II**

Filière : **PSI**

Durée **4 heures**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de la page de garde

L'usage de tout document et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3, par I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. a) Vérifier que $PQ = 3I_3$.
   b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.
   c) Vérifier que $AP = PD$.
   d) En déduire que A est une matrice diagonalisable.

2. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.
   b) Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.
   c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

4. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ sont des suites réelles. On définit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n , b_n et c_n en fonction de n. (On utilisera l'expression de A^n obtenue dans la question 3. c)).

   c) Déterminer les limites des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$.

Problème 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par,

$$M_a = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & -2a \\ -1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que le polynôme caractéristique de la matrice de M_a est donné par $\chi_{M_a} = \det(XI_3 - M_a)$, I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie 1
Calcul des puissances de la matrice M_a

1. a) Vérifier que le polynôme caractéristique de M_a est $\chi_{M_a} = (X-1)(X-a+1)(X-a)$.

   b) En déduire le déterminant de M_a.

   c) Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice M_a est inversible.

2. a) Déterminer les valeurs propres de f_a.

   b) Déterminer suivant les valeurs de a, la multiplicité de chaque valeur propre de f_a.

3. Posons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = -2e_1 + e_2 \end{cases}$.

   a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

   b) Vérifier que e'_1, e'_2 et e'_3 sont des vecteurs propres de f_a.

   c) Prouver que la matrice M_a est diagonalisable.

   d) Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   e) Donner une matrice diagonale D_a vérifiant $M_a = PD_aP^{-1}$.

   f) Dans le cas où M_a est inversible, déterminer l'expression de M_a^{-1} sous la forme d'un tableau.

Partie 2
Commutant de la matrice M_a

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(A) = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AN = NA\}$ le commutant de A.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $N \in \mathcal{C}(A)$ et N inversible, alors $N^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.
3. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $N \in \mathcal{C}(M_a)$ si, et seulement si, $P^{-1}NP \in \mathcal{C}(D_a)$.
   b) En déduire que les sous espaces vectoriels $\mathcal{C}(M_a)$ et $\mathcal{C}(D_a)$ ont même dimension.
4. On suppose que $a \notin \{1, 2\}$.
   a) Déterminer $\mathcal{C}(D_a)$.
   b) En déduire $\mathcal{C}(M_a)$ et préciser sa dimension.
5. Déterminer $\mathcal{C}(D_1)$, $\mathcal{C}(D_2)$ et préciser les dimensions de $\mathcal{C}(M_1)$ et $\mathcal{C}(M_2)$.

Problème 2

Pour n un entier supérieur ou égal à 2, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n, et par $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des réels, on note $diag(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dans cet ordre.
Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite une racine carrée de A si $R^2 = A$.
On note $\mathcal{R}_n(A)$ l'ensemble des racines carrées de A, c'est-à-dire,

$$\mathcal{R}_n(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ R^2 = A\}$$

On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.
On dit qu'une matrice M de $S_n(\mathbb{R})$ est positive si pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$.
On notera l'ensemble des matrices symétriques réelles positives par $S_n^+(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème est de déterminer les racines carrées d'une matrice réelle dans des cas particuliers.

Partie 1
Cas où A est une matrice possédant n valeurs propres distinctes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. On pose $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
   b) Montrer que R est une racine carrée de A si, et seulement si, la matrice $P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.
2. Soit $\triangle$ une racine carrée de la matrice D.
   a) Montrer que $\triangle D = D\triangle$.

b) En déduire que $\triangle$ est une matrice diagonale.

c) Si on pose $\triangle = diag(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, déterminer pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, δ_i^2 en fonction de λ_i.

3. Déterminer $\mathcal{R}_n(A)$ dans le cas où A admet au moins une valeur propre strictement négative.

4. On suppose que les valeurs propres de A sont toutes positives ou nulles.

a) Déterminer les racines carrées de la matrice D.

b) En déduire les racines carrées de A en fonction de la matrice P et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

c) Déterminer le nombre des racines carrées de la matrice A.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{R}_3(A)$.

Partie 2

Cas où A est une matrice carrée symétrique réelle positive

1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle est positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives.

2. Soit A une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.

a) Justifier l'existence de deux matrices, P orthogonale et D diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A = PDP^{-1}$.

b) En déduire qu'il existe une matrice S de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$.

3. Soit A une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$. Dans cette question, on va montrer l'unicité de la racine carrée de A dans $S_n^+(\mathbb{R})$.
Considérons donc S_1 et S_2 deux matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S_1^2 = S_2^2 = A$.
Soient P_1, P_2 de $GL_n(\mathbb{R})$ et D_1, D_2 deux matrices diagonales telles que,

$$S_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \text{ et } S_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

a) On pose $P = P_2^{-1} P_1$. Montrer que $PD_1^2 = D_2^2 P$.

b) En déduire que $PD_1 = D_2 P$, puis que $S_1 = S_2$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi