Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2022, filière PSI

Mathématiques I

Ce que traite le sujet

- Exercice : suites récurrentes et application
- Problème, 1re partie : résultats préliminaires
- Problème, 2e partie : rayon de convergence et somme
- Problème, 3e partie : comportement aux bornes

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2022/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice
Étude de suites récurrentes et application
(Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, on considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée du couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = & u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} = & u_n + v_n. \end{cases}$$

0.1. Première méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire ses valeurs propres.

0.1.2. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.3. Montrer que la matrice P est inversible et calculer le produit matriciel $D = P^{-1}AP$.

0.1.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis en déduire les expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

0.1.5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

0.1.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et $n \in \mathbb{N}$.

0.2. Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

0.2.2. Montrer que l'ensemble $F = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles, puis en donner la dimension et une base.

0.2.3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

0.3. Soit ρ un réel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\rho^n}{n!} z^n$, puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

0.4. Pour chacune des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} z^n$, déterminer le rayon convergence puis exprimer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

Problème

Étude d'une série entière

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\binom{\alpha}{n} = 1$ si $n = 0$, et $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geq 1$.

On considère la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \binom{t}{n}\,\mathrm{d}t.$$

Le problème a pour objectif de déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$*, puis de calculer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence et en fin d'étudier son comportement aux bornes de cet intervalle.*

1ère Partie
Quelques résultats préliminaires

1.1. Une inégalité utile

Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.1.1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = t\varphi'(0) + \displaystyle\int_0^t (t-s)\varphi''(s)\,\mathrm{d}s$.

1.1.2. En déduire que $\varphi'(0) = -\displaystyle\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)\,\mathrm{d}s$.

1.1.3. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = -\displaystyle\int_0^1 \big(\min(s,t) - st\big)\varphi''(s)\,\mathrm{d}s$.

1.1.4. Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $0 \leq \min(s,t) - st \leq \dfrac{1}{4}$, puis en déduire que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}.$$

1.2. Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique

1.2.1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$.

1.2.2. En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.

1.3. Formule du binôme généralisée

Si N est un entier naturel et x un nombre réel, alors $(1+x)^N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{N}{n} x^n$ *; c'est la formule du binôme de Newton. L'objectif de cette section est d'établir une généralisation de cette formule au cas où N est remplacé par un réel qui n'est pas un entier naturel.*

Pour cela, on considère un nombre réel α, qui **n'est pas un entier naturel**, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall\, x > -1, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha.$$

1.3.1. Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - \alpha y = 0. \tag{1}$$

1.3.2. On se propose dans cette sous section de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = (n-\alpha)a_n$.

(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.

(iii) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

1.3.3. Montrer soigneusement que pour tout $x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

2ème Partie
Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

On rappelle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \binom{t}{n}\,\mathrm{d}t.$$

.

2.1. Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$ et tout entier naturel n, $\left|\binom{t}{n}\right| \leq 1$.

2.2. En déduire que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ vérifie $R_1 \geqslant 1$.

2.3. Soit $x \in]-1,1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad u_n(t) = \binom{t}{n} x^n.$$

2.3.1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

2.3.2. En déduire que

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

2.4. On cherche ici à montrer que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ vaut 1.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $R_1 > 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $x \in]-R_1, R_1[$.

2.4.1. Soit $x \in]0,2[$. Justifier que $f(x-1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-1}{\ln x}$.

2.4.2. Trouver une contradiction et conclure.

3ème Partie
Étude du comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note h_n la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad h_n(t) = t\ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln\big(1 - \frac{t}{k}\big).$$

3.1. Étude de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$

On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, t \in [0,1],\quad v_n(t) = \ln\big(1-\frac{t}{n}\big) - t\ln\big(1-\frac{1}{n}\big).$$

3.1.1. Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]$, $h_n(t) = \sum_{k=2}^{n} v_k(t)$.

3.1.2. En utilisant le résultat de la section **1.1.** de la première partie, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant v_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)} - \dfrac{1}{4n}$.

3.1.3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

3.1.4. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers une fonction notée h, puis justifier que h est continue sur le segment $[0,1]$.

3.2. Recherche d'un équivalent de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3.2.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^{n-1}|b_n|$.

3.2.2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $(n+1)|b_{n+1}| = \displaystyle\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h_n(t)}\,\mathrm{d}t$.

3.2.3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant h(t) - h_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

3.2.4. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'encadrement

$$e^{-\frac{1}{4n}}\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant (n+1)|b_{n+1}| \leqslant \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3.2.5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln^2 n}\int_0^{\ln n} se^{-s}\left(1-\frac{s}{\ln n}\right)e^{h\left(\frac{s}{\ln n}\right)}\,\mathrm{d}s$.

3.2.6. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\forall\, t \geqslant 0,\quad g(t) = (1-t)e^{h(t)} \quad \text{si} \quad t \in [0,1] \quad \text{et} \quad g(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 1.$$

(i) Justifier que la fonction g est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

(ii) Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la suite numérique $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} se^{-s}g\left(\frac{s}{\ln n}\right)\mathrm{d}s\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

(iii) Déduire de ce qui précède que $|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ et que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$.

3.3. Retour à l'étude de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

3.3.1. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, de la variable réelle x, converge normalement sur le segment $[-1,1]$.

On note encore f la somme de cette série sur le segment $[-1,1]$:

$$\forall\, x \in [-1,1],\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

3.3.2. Justifier que, pour tout $x \in]-1,1]$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

3.3.3. Justifier la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n$ et calculer sa somme.

Fin de l'épreuve

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Séries numériques et vectorielles
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Équations différentielles linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi