Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2022, filière PSI

Mathématiques II

Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : étude d'une suite de polynômes
- Exercice 2 : base orthonormée d'un hyperplan de R^n
- Problème, 1re partie : similitude des matrices de rang 1
- Problème, 2e partie : sous-espace engendré par les matrices nilpotentes

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Photographies du sujet officiel imprimé : quelques petites marques au stylo en marge des questions et pages légèrement inclinées ; le texte du sujet n'est pas modifié.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2022/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice 1

Étude d'une suite de polynômes

(Noté sur 4 points sur 20)

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définis par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'.$$

1.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré $\leqslant n$.

1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $P_n = a_n X^n + Q_n$, avec $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n-1$.

1.2.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}a_n$.

1.2.2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$ puis préciser le degré de P_n.

1.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ puis préciser la parité du polynôme P_n en fonction de n.

1.4. Valeurs en 0 du polynôme P_n, pour $n \in \mathbb{N}$, et une expression intégrale

1.4.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}' = (n+2)P_n$.

1.4.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.

1.4.3. Déduire de ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.5. Expression des polynômes P_n

1.5.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$.

1.5.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$.

(i) Préciser u_0 et vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 2x\,u_{n+1} - (1+x^2)u_n.$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer le terme général u_n, de la suite numérique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, en fonction de n et du nombre réel x.

1.5.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \dfrac{1}{2i}\Big((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\Big)$, où $i \in \mathbb{C}$ et $i^2 = -1$.

1.6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et en préciser les racines.

Exercice 2

Construction d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel, avec $n \geqslant 2$. On munit le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalier canonique noté $(.|.)$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $v_k = e_k - e_{k+1}$.

On note H la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par : $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

2.1. Structure de H

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

2.1.1. Vérifier que ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

2.1.2. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

2.2. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est une base de H.

2.3. Construction d'une base orthogonale de H

Dans cette section, on cherche à construire une base orthogonale, notée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, de H en appliquant le procédé de Schmidt à la famille libre $(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ et on note p_k la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F_k.

2.3.1. Montrer que, pour tout $(j,k) \in \{1, \ldots, n-1\}^2$, $(v_j|v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \in \{j-1, j+1\}, \\ 2 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \notin \{j-1, j, j+1\}. \end{cases}$

2.3.2. Vérifier que $\varepsilon_1 = v_1$ et que, pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, $\varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k)$.

2.3.3. Détermination de ε_k pour $k \in \{2, \ldots, n-1\}$

Soit $k \in \{2, \ldots, n-1\}$; on pose $\varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$.

(i) Montrer que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_k X = B_k$, où $A_k = \big((v_j|v_\ell)\big)_{1 \leqslant j, \ell \leqslant k-1}$ est la matrice de Gram associée à la famille $(v_1, \ldots, v_{k-1})$, et B_k désigne le vecteur colonne de composantes $(v_1|v_k), \ldots, (v_{k-1}|v_k)$.

(ii) Montrer que le système $A_k X = B_k$ s'écrit $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \vdots \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} = -1 \end{cases}$.

(iii) Résoudre le système $A_k X = B_k$ et en déduire que $\varepsilon_k = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}, -1, 0, \ldots, 0)$, le -1 étant situé à la $(k+1)$–ième place.

2.4. Donner une base orthonormée de H.

Problème

Similitude de matrices de rang 1 et application à la détermination du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, et n un entier naturel **supérieur ou égal à 2**.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes. Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A et $\mathrm{rg}(A)$ son rang.

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}-$espace vectoriel des endomorphismes de E. Si $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ se note uv et l'identité est notée id_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, les endomorphismes itérés u^p de u sont définis par les relations $u^0 = id_E$ et $u^p = uu^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

1ère Partie
Similitude de matrices de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A.

1.1. Montrer que le noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est de dimension $n-1$.

1.2. Soit $e_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \operatorname{Ker} f$ et soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f$.

1.2.1. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1.2.2. Écrire la matrice B de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et en déduire qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{Tr}(A) \end{pmatrix}.$$

1.3. On suppose ici que $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.

1.3.1. Montrer que la matrice A possède deux valeurs propres qui sont 0 et $\operatorname{Tr}(A)$.

1.3.2. Préciser la dimension du sous-espace propre de A associée à la valeur propre 0 puis montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3.3. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale à préciser.

1.4. On suppose ici que $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et on reprend les notations de la section **1.2.** ci-dessus.

1.4.1. Montrer que $f(e_n) \in \operatorname{Ker} f$.

1.4.2. On pose alors $e'_{n-1} = f(e_n)$. Montrer qu'on peut compléter le vecteur e'_{n-1} en une base $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} f$, puis justifier que la famille $(e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1.4.3. Montrer que la matrice B' de f dans la base $(e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)$ est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis justifier que la matrice A est semblable à B'.

1.4.4. Calculer B'^2 et en déduire que la matrice A est nilpotente.

1.5. Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, elles ont la même trace.

2ème Partie
Application à la détermination du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes

On note $\mathscr{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

2.1. Linéarité et noyau de la trace

2.1.1. Vérifier que l'application $\operatorname{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ X \longmapsto \operatorname{Tr}(X)$ est linéaire et non nulle. En préciser le rang.

2.1.2. En déduire que l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ \operatorname{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$.

2.2. Étude de l'inclusion $\mathscr{V} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{Tr}$

2.2.1. On considère une matrice nilpotente $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que 0 est l'unique valeur propre de A, puis justifier que $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$.

2.2.2. Montrer que $\mathscr{V} \subset \operatorname{Ker} \mathrm{Tr}$.

2.3. On considère les matrice $F_1, \ldots, F_{n-1}$ définies par $F_k = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, avec

$$a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in \{k, k+1\},\ j = k\ ; \\ -1 & \text{si} \quad i \in \{k, k+1\},\ j = k+1\ ; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Autrement dit :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ F_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, préciser le rang et la trace de la matrice F_k puis en déduire que F_k est une matrices nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.4. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, avec $i \neq j$, on note $F_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on pose enfin $F_{i,i} = F_i$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Vérifier que pour tout $i \neq j$, la matrice $F_{i,j}$ est nilpotente et montrer que toutes les matrices $F_{i,j}$ définies ci-dessus forment une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{V}$.

2.5. Montrer que $\mathscr{V} = \operatorname{Ker} \mathrm{Tr}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi