Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2023, filière PSI

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice : un problème d'extremum
- Problème, 1re partie : solutions de y'' + y = f sous forme intégrale
- Problème, 2e partie : intégrale à paramètre et intégrale de Dirichlet
- Problème, 3e partie : somme d'une série de fonctions

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie retapée en LaTeX, probablement par un enseignant, d'après le sujet officiel : la mise en page n'est pas celle du concours et de petites différences de forme sont possibles.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2023/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques I
Session 2023 - Filière PSI

L'usage de tout matériel électronique, y compris La calculatrice, est interdit

Durée : 4 heures

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice

Un problème d'extremum

(Noté 4 points sur 20)

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1 Justifier que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Montrer que la fonction F admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1 Calculer les dérivées partielles secondes de F au point (x_0, y_0).

2.2 À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction F présente un extremum local au point (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

3.2 Montrer qu'en fait la fonction F présente un extremum absolu strict au point (x_0, y_0).
On pourra remarquer que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}$$

Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

Dans ce problème, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \sin(x - t) \mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles.

1ère Partie

Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ Application au cas où f est 2π-périodiques .

1.1 Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

1.2 Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \, \mathrm{d}t$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \, \mathrm{d}t$.

1.2.1 Justifier que les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$

1.2.2 Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.3 En déduire que φ_{f,x_0} est dérivable sur I et exprimer $\varphi'_{f,x_0}(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi'_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.4 Montrer que φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et qu'elle est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

1.2.5 Montrer que φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0.

1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$

Montrer que les solutions, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1.4. Un exemple d'application

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $g'' + g \geq 0$; on pose $f = g'' + g$

1.4.1. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

1.4.2. En déduire une expression intégrale de g puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x+\pi) + g(x) \ \geq 0$$

2ème Partie

Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$, *dite de Dirichlet.*

2.1. Convergence d'intégrales

2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

i) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

ii) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$

iii) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

2.1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$ est également convergente.

2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I =]0,+\infty[$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

Dans cette section, on suppose que $I =]0,+\infty[$ et que f est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$. On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ admet une unique solution, sur $]0,+\infty[$, ayant 0 pour limite en $+\infty$.

2.2.1. Analyse : On suppose que ψ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

i) Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0, \quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x.$$

ii) Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et que $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$. *On pourra considérer les suites numériques $(\psi(2n\pi))_{n\geqslant 1}$ et $\left(\psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$*

iii) En déduire que, pour tout $x > 0, \psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t$.

2.2.2. Synthèse : Montrer que la fonction $\psi_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t$ est effectivement solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ et qu'elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

2.3. Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

2.3.1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. *Dans la suite de cette partie, on pose* $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t, \quad x \geqslant 0.$

2.3.2. Calculer $h(0)$.

2.3.3. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction h est continue sur $[0,+\infty[$.

2.3.4. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction h admet 0 pour limite en $+\infty$.

2.3.5. Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, puis donner une expression de h'' sous forme intégrale.

2.3.6. Montrer que, pour tout réel $x > 0, h''(x) + h(x) = \frac{1}{x}$.

2.3.7. En déduire que pour tout $x > 0$ $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{x+s}ds$

2.4. Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

O*n reprend ici les notations de la section précédente.*

2.4.1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant x\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\frac{1}{x+t}\ \mathrm{d}t + x\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(x+t)}\mathrm{d}t\right|$$

2.4.2. En déduire que pour tout réel $x > 0$,

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\ \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

2.4.3. Montrer soigneusement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

3ème Partie

Application à l'étude de la somme d'une série de fonctions

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *de fonctions définies sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *par :*

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times[0,+\infty[\,,\ u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

3.1 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,+\infty[$

3.2. Montrer que, pour tout $a>0$, les séries de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} nu_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n^2u_n$ convergent normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$

Dans la suite de cette partie, on pose $u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $\quad x\geqslant 0$.

3.3. Quelques propriétés de la fonction u

3.3.1. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction u est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3.3.2. Montrer de même que la fonction u admet 0 pour limite en $+\infty$.

3.3.3. Montrer que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée seconde sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

3.3.4. Montrer que

$$\forall x>0,\quad u''(x)+u(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

3.3.5. En utilisant les résultats de la première partie du problème, montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x>0,\quad u(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x+\int_1^x\frac{1}{e^t-1}\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

3.4. Une autre expression intégrale de la fonction u

3.4.1. Montrer que, pour tout $a>0$, la fonction $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}$ est intégrable sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

3.4.2. En déduire que, pour tout $a>0$, les fonctions $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}\sin t$ et $t\longmapsto\frac{1}{e^t-1}\cos t$ sont intégrables sur l'intervalle $[a,+\infty[$. intégrables sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

3.4.3. Montrer que, pour tout $x>0$, $\quad u(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin s}{e^{x+s}-1}\,\mathrm{d}s$.

3.5. Justifier que la fonction $t\longmapsto\dfrac{\sin t}{e^t-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et montrer, en précisant le théorème utilisé, que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi