Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2025, filière PSI

Mathématiques II

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Partie 1 : préliminaires
- Partie 2 : la valeur absolue de la trace comme fonction génératrice
- Partie 3 : caractérisation des matrices symétriques positives par la trace

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2025/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴰⵜⵜⴰⵡⵉⵏ
ⵜⵉⵣⵔⴼⵉⵏ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⵏ ⵜⵣⵣⵓⵢⵜ

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation

جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

ENSEM

CONCOURS NATIONAL COMMUN

D'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2025

Épreuve de Mathématiques II

Filière : **PSI**

Durée : **4 heures**

Cette épreuve comporte **4 pages** au format A4, en plus de cette page de garde.

IMPORTANT
L'usage de tout document et de tout système électronique ou informatique est interdit durant cette épreuve.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $\text{Vect}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

1. On pose $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1)$, $f_3 = (0,1,1)$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - z = 0\right\}$.
   a) Vérifier que $F = \text{Vect}(f_2, f_3)$.
   b) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = O$, avec $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice nulle.
   b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
3. a) Déterminer les deux réels α et β tels que :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible, qui sont à déterminer, telles que $A = PDP^{-1}$.
   c) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Problème

On désigne par n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ le polynôme caractéristique de M. On note ${}^tM$ la matrice transposée de la matrice M et $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice carrée M. On rappelle que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

On note $diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre.

On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tS = S$.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$.

$\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{*+}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Le problème traite des propriétés et des applications qui sont autour de la notion de trace.

Partie 1 : Préliminaires

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$, est linéaire.

2. Soient $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{l,k}n_{k,l}$.

   b) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

   c) Montrer que si M et N sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.

3. On considère l'ensemble $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M \text{ est diagonale et } \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}$.

   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   b) Déterminer la dimension de F.

   c) En déduire que, pour toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $G = PFP^{-1} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M = PDP^{-1} \text{ et } D \in F\right\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \quad X \mapsto X + (\mathrm{Tr}(X))A$$

   a) Vérifier que ϕ_A est une application linéaire.

   Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle :

$$(\star) \qquad \phi_A(X) = B$$

   b) On suppose dans cette question que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.

      i) On suppose que M est une solution de l'équation matricielle $(\star)$. Déterminer $\mathrm{Tr}(M)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de $\mathrm{Tr}(B)$.

      ii) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $(\star)$.

      iii) En déduire que ϕ_A est un automorphisme d'espaces vectoriels.

   c) On suppose maintenant que $\mathrm{Tr}(A) = -1$.

      i) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(B)$, l'équation matricielle $(\star)$.

      ii) Montrer que ϕ_A est un projecteur sur un sous-espace vectoriel F_1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer F_1 et F_2.

Partie 2 : La valeur absolue de la trace comme étant une "fonction génératrice"

Dans cette partie, on note $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n^2 et que sa base canonique est $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, où pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{E}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui est égal à 1. Pour tous entiers h et k tels que $1 \leq h, k \leq n$, on désigne par $\delta_{h,k}$ le symbole de Kronecker qui est défini par $\delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = k \\ 0 & \text{si } h \neq k \end{cases}$. On rappelle que pour tous entiers naturels i, j, k, l tels que $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Une application q de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^+$ est dite semi-norme sur $\mathcal{E}$, si elle vérifie :

- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda M) = |\lambda| q(M)$.
- $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(M + N) \leq q(M) + q(N)$.

On dit qu'une semi-norme q sur $\mathcal{E}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si $\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, q(MN) = q(NM)$.

1. **Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$.**

   a) Montrer que $q(O) = 0$, où O est la matrice nulle, et que pour tout M de $\mathcal{E}$, $q(-M) = q(M)$.

   b) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, $\Big|q(M) - q(N)\Big| \leq q(M + N)$.

   c) Montrer que pour tout (M, N) de $\mathcal{E}^2$, si $q(N) = 0$ alors $q(M + N) = q(M)$.

2. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $f(M) = |\operatorname{Tr}(M)|$.
   Montrer que f est une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
   Dans les questions 3. et 4. de cette partie, on suppose que $n \geq 2$.

3. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ telles que,

$$A = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i} \text{ et } B = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h E_{h,1}$$

   a) Montrer que $AB = \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\Big) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{i,1}$.

   b) Montrer que $BA = \sum_{h=1}^{n} \Big(\alpha_h \sum_{j=1}^{n} E_{h,j}\Big)$.

4. **Soit q une semi-norme sur $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.**

   Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de $\mathcal{E}$.

   a) Montrer que pour tous entiers distincts i et j tels que $1 \leq i, j \leq n$, $q(E_{i,j}) = 0$, (on pourra utiliser le fait que $E_{i,j} = E_{i,i}E_{i,j}$).

   b) En déduire que $q\Big(\sum_{i=2}^{n} m_{i,1} E_{i,1}\Big) = 0$.

   c) Vérifier que $q(M) = q\Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i}\Big)$.

   d) Montrer, en prenant des valeurs précises pour $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ qui définissent la matrice B, que $q(M) = q(BA)$.

   e) Montrer qu'il existe un réel positif α tel que $q = \alpha f$.

5. Dans le cas où $n = 1$, le résultat démontré ci-dessus reste-t-il valable? justifier votre réponse.

Partie 3 : Caractérisation d'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ par la notion de trace

$\mathcal{O}(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tMM = I_n$.

1. On considère une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

   a) Soit la matrice $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, λ_k sont des réels positifs. Soit $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

      i) Montrer que pour tous entiers k et i, $1 \leq k, i \leq n$, $|u_{k,i}| \leq 1$.

      ii) Vérifier que $DU = (\lambda_i u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

      iii) En déduire que $\mathrm{Tr}(DU) \leq \mathrm{Tr}(D)$.

   b) Soit U une matrice de $\mathcal{O}(n)$.

      i) Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathcal{O}(n)$ et une matrice $D = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, avec pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, α_i sont des réels positifs et $S = PD({}^tP)$.

      ii) Montrer, en posant $V = ({}^tP)UP$, que $SU = P(DV)({}^tP)$.

      iii) En déduire que $\mathrm{Tr}(SU) \leq \mathrm{Tr}(S)$.

2. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,
$$\forall U \in \mathcal{O}(n) \quad \mathrm{Tr}(AU) \leq \mathrm{Tr}(A)$$

   a) i) Montrer que, pour tous réels a, b, α, il existe un réel φ tel que,
$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

      ii) En déduire que, si pour tout réel α, $a\cos\alpha + b\sin\alpha \leq a$ alors $b = 0$.

   b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel. On note, pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq n$, $\pi_{p,q}$ le plan engendré par la famille (e_p, e_q). On considère $u_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction de $u_{p,q}$ sur $\pi_{p,q}$ est la rotation du plan $\pi_{p,q}$ d'angle α et la restriction de $u_{p,q}$ sur l'orthogonal de $\pi_{p,q}$ est l'application identité de l'orthogonal de $\pi_{p,q}$.

      i) Écrire la matrice $U_{1,2}$ de $u_{1,2}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et montrer que $U_{1,2}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

      ii) Calculer $\mathrm{Tr}(AU_{1,2})$ en fonction de $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et de α.

      iii) En déduire que $a_{1,2} = a_{2,1}$.

      iv) Écrire, dans le cas général, la matrice $U_{p,q}$ de $u_{p,q}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

      v) Calculer, dans le cas général, $\mathrm{Tr}(AU_{p,q})$ en fonction de $a_{p,q}$, $a_{q,p}$, $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et de α.

      vi) En déduire que A est une matrice symétrique.

   c) i) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme g canoniquement associée à la matrice A.
   Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note γ_i la valeur propre de g associée au vecteur propre v_i.

      ii) Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. On considère l'endomorphisme w_j de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_j(v_j) = -v_j$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$, $w_j(v_k) = v_k$. Soit W_j la matrice de l'endomorphisme w_j relativement à la base $\mathcal{B}$.
   Vérifier que W_j est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{Tr}(AW_j)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et de γ_j. En déduire que $\gamma_j \geq 0$.

   d) En déduire que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi