Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2025, filière PSI

Physique II

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : champ de pression dans la troposphère
- Partie 2 : modélisation d'une tornade

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/psi/2025/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.*

Tornade atmosphérique

Lorsque l'équilibre hydrostatique de l'atmosphère est rompu, les mouvements verticaux des masses d'air donnent naissance aux perturbations atmosphériques. Sous certaines conditions, certaines perturbations peuvent dégénérer en tourbillons, tornades, cyclones... Une tornade, de l'espagnol tornado, tourner, est une colonne de vents extrêmement violents ascendants en entonnoir et tourbillonnant. Elle prend naissance à la base d'un nuage d'orage de type cumulonimbus. Le cumulonimbus pompe l'air chaud et humide des basses couches de l'atmosphère. Ce phénomène météo a un pouvoir destructeur supérieur à celui d'un cyclone tropical au mètre carré, mais est de durée et d'étendue limitées : le diamètre est généralement compris entre 50 et 1000 m.

*Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La partie 1 est notée sur **4 points**, la partie 2 sur **16 points**.*

Données :

- Masse molaire de l'air : $M_a = 29 g.mol^{-1}$.
- Accélération de pesanteur : $g = 9{,}81 \text{m.s}^{-2}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31 \text{J.K}^{-1} mol^{-1}$.
- Vitesse du son dans l'air : $v_s = 340 m.s^{-1}$.
- $1\ bar = 1{,}013.10^5\ Pa$.
- Équation fondamentale de la statique des fluides : $-\overrightarrow{grad}\left(P(M)\right) + \mu(M)\vec{g}(M) = \vec{0}$.
- Accélération d'une particule de fluide : $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v} \wedge \vec{v}$.
- En coordonnées cylindrique, et pour un champ scalaire f et un champ vectoriel $\vec{A}$:
  - Gradient : $\overrightarrow{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$.
  - Divergence : $div(\vec{A}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.
  - Rotationnel : $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$.
  - Théorème de STOCKES OSTROGARDSKI : $\oint_{C\ de\ S} \vec{A}.d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right).d\vec{S}$.

Partie 1

Champ de pression dans la troposphère

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés de la basse atmosphère terrestre (troposphère), d'altitude inférieure à $10km$. L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a en équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ uniforme, d'intensité g. Pour décrire l'atmosphère on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(Oxyz)$ auquel on associe la base $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$. L'axe Oz du repère est ascendant et la référence $z=0$ des altitudes est choisie à la surface de la Terre. On désigne par, $T(z)$ la température de l'air, $P(z)$ sa pression et $\mu_a(z)$ sa masse volumique à l'altitude z. La pression de l'air au niveau du sol est $P(z=0)=P_0=1,0bar$.

1. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, établir l'expression de la masse volumique $\mu_a(z)$ de l'air en fonction de la pression $P(z)$, de la température $T(z)$ et des autres données. Calculer la masse volumique de l'air $\mu_a(z=0)$ au niveau du sol pour $T_0=20°C$.

2. On suppose dans cette question l'atmosphère isotherme de température $T(z)=T_0=20°C$.

2.1. Intégrer l'équation de la statique des fluides sur une colonne d'air et exprimer la pression atmosphérique $P(z)$ en un point d'altitude z.

2.2. Calculer la pression $P(H_t)$ et la masse volumique de l'air $\mu_a(H_T)$ au sommet du Toubkal ($H_T=4167m$).

2.3. Par un développement limité de l'expression obtenue au **2.1**, comparer le résultat précédent à celui obtenu si l'air était considéré comme incompressible. Qu'en concluez-vous ?

3. Des relevés expérimentaux montrent qu'en l'absence de mouvement des masses d'air, la température de l'air décroît avec l'altitude selon une loi affine, $T(z)=T_0-\alpha z$, avec $\alpha=6,78.10^{-3}K.m^{-1}$.

3.1. Déterminer la loi de variation de la pression atmosphérique $P(z)$. Calculer la pression $P(H_T)$ et la masse volumique de l'air $\mu_a(H_T)$ au sommet du Toubkal. Comparer aux résultats de la question **2.2** et commenter.

3.2. Montrer que, dans la basse atmosphère, on a une relation du type $PT^{\frac{k}{1-k}}=P_0T_0^{\frac{k}{1-k}}$. Calculer k.

Partie 2

Modélisation d'une tornade

On modélise une tornade par un cylindre d'axe vertical ascendant (Oz) et de rayon R. On assimile l'air, de masse volumique $\mu_a=1,3kg.m^{-3}$, à un fluide en écoulement parfait, incompressible, homogène et stationnaire. La tornade (figure 1), de symétrie cylindrique d'axe (Oz), est décrite dans le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) (figure 2) auquel on associe la base orthonormée directe $\left(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z}\right)$, par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ vertical et uniforme à l'intérieur du cylindre, et nul à l'extérieur :

$$\vec{\Omega}=\begin{cases}\Omega_0\vec{e_z} & si \quad 0\le r\le R\\ \vec{0} & si \quad r>R\end{cases}$$



Figure 1 : Une tornade

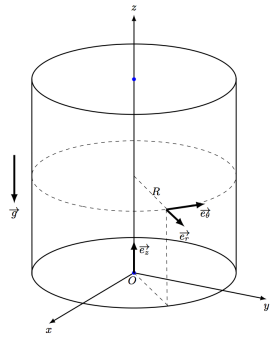


Figure 2 : Schématisation d'une tornade

On représente l'écoulement étudié par le champ de vitesse $\vec{v} = v(r,\theta,z)\vec{e_\theta}$ et le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{v}$. Le champ de pesanteur est supposé localement uniforme $\vec{g} = -g\vec{e_z}$. À la périphérie de la tornade, la vitesse a pour module $v_0 = 180 km.h^{-1}$. L'étude est faite dans le référentiel terrestre $(R_g) = (O,x,y,z)$ supposé galiléen. On donne : $R = 50m$.

La pression atmosphérique loin de la tornade étudiée est notée P_0.

Le nombre de Mach d'un écoulement est défini par : $Ma = \frac{v_é}{v_s}$ où $v_é$ est l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement et v_s la célérité du son dans le fluide.

1. Que représente le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$?

2. Justifier que la quantité $\Pi = \frac{1}{2}\mu_a v_0^2$ est homogène à une pression. Calculer sa valeur numérique et prévoir son sens physique.

3. Un gaz est compressible, cependant un gaz peut être en écoulement incompressible lorsque la vitesse de l'écoulement est inférieure à la vitesse du son. À partir d'ordre de grandeur, discuter l'hypothèse de l'écoulement incompressible pour l'air.

4. Énoncer l'équation locale de conservation de la masse.

5. L'écoulement est considéré stationnaire. Quelle simplification découle de cette hypothèse ?

6. Exprimer la condition d'incompressibilité et montrer que la vitesse v ne dépend pas de θ.

7. Calculer le rotationnel de $\vec{v}$ et montrer que la vitesse v ne dépend pas de z.

8. Montrer que l'expression du champ des vitesses $\vec{v}$ à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre est donnée par :

$$\vec{v} = \begin{cases} \left(\Omega_0 r + \frac{A}{r}\right)\vec{e_\theta} & si \quad 0 \le r \le R \\ \frac{B}{r}\vec{e_\theta} & si \quad r \ge R \end{cases}$$

Justifier que la constante A est nécessairement nulle et déterminer la constante B. Commenter la valeur de v pour $r = 0$.

9. L'écoulement de l'air est-il rotationnel ?

10. À quelle distance du centre de la tornade la vitesse v est-elle maximale ? Que vaut cette vitesse v_{max} ?

11. Déterminer les lignes de courant de la tornade en tout point de l'espace.

12. Représenter le champ des vitesses $v(r)$ en fonction de r. Tracer quelques vecteurs vitesse le long d'une droite passant par l'origine en tenant compte de l'allure de $v(r)$. Préciser l'allure des lignes de courant.

13. Calculer la circulation de $\vec{v}$ sur un cercle (C), d'axe (Oz) et de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique.

14. Calculer l'accélération $\vec{a}$ d'une particule de fluide pour $0 \leq r \leq R$ puis pour $r \geq R$. Vérifier que $\vec{a}$ se met sous la forme $\vec{a} = a(v,r)\vec{e_r}$ et commenter la signification de l'expression obtenue.

15. On s'intéresse maintenant au cas limite d'un vortex, tornade telle que $R \to 0$ et $\Omega_0 \to \infty$ mais en gardant la quantité $\Gamma = 2\pi\Omega_0 R^2$ finie et non nulle.

15.1. Déterminer le champ des vitesses d'un vortex. Que représente la grandeur Γ ?

15.2. Montrer que le champ des vitesses d'un vortex dérive d'un potentiel ϕ. Établir l'expression de ϕ. Quelle est la forme des équipotentielles ?

15.3. Montrer qu'un vortex brise l'invariance par rotation d'angle θ.

15.4. Tracer l'allure des lignes de courant et quelques équipotentielles.

15.5. Comparer brièvement le problème du vortex à celui d'un fil infini, d'axe (Oz), parcouru par un courant électrique d'intensité I constante, et établir l'analogie existant entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}$, d'une part, et le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ de la magnétostatique, d'autre part.

16. On souhaite déterminer le champ de pression $P(r)$ dans l'air dans les deux domaines, $r \leq R$ et $r \geq R$. On utilise pour cela l'équation de NAVIER-STOKES :

$$\mu_a\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = \vec{f_v} - \overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v}$$

où $\Delta\vec{v}$ est le laplacien de $\vec{v}$.

16.1. À quoi correspond chaque terme de l'équation de NAVIER-STOKES ? Préciser l'unité de cette équation.

16.2. Que vaut $\vec{f_v}$ dans le cas du champ de pesanteur ?

16.3. Simplifier l'équation de NAVIER-STOKES dans le cadre des hypothèses d'étude de la tornade et montrer que l'on obtient :

$$-\mu_a \frac{v^2}{r}\vec{e_r} = \vec{f_v} - \overrightarrow{grad}P$$

16.4. Projeter l'équation de la question **16.3** sur $\vec{e_\theta}$. Conclure.

16.5. Projeter l'équation de la question **16.3** sur $\vec{e_z}$ et déduire la relation $P(r,z) = -\mu_a g z + f(r)$, où $f(r)$ est une fonction de r que l'on cherchera dans la question suivante.

16.6. Projeter l'équation de la question **16.3** sur $\vec{e_r}$ et déduire l'équation différentielle que vérifie la fonction $f(r)$.

16.7. On se place dans le domaine $r \geq R$. En tenant compte de la condition aux limites à grande distance de la tornade, montrer que la pression $P(r)$ en tout point extérieur au cylindre de rayon R est donnée par :

$$P(r,z) = P_0 - \mu_a g z - \frac{\mu_a \Omega_0^2 R^4}{2r^2}$$

16.8. Justifier que dans le domaine $r \geq R$, le théorème de BERNOULLI est valable en tout point du fluide. Écrire le théorème de BERNOULLI et retrouver le résultat de la question précédente.

16.9. On se place dans le domaine $r \leq R$. En tenant compte de la continuité de la pression en $r = R$, montrer que la pression $P(r)$ en tout point intérieur au cylindre de rayon R est donnée par :

$$P(r,z) = P_0 - \mu_a g z + \mu_a \Omega_0^2 \left(\frac{1}{2} r^2 - R^2 \right)$$

16.10. Justifier que dans le domaine $r \leq R$, le théorème de BERNOULLI n'est valable que le long d'une ligne de courant. Dire, en justifiant, si l'on peut retrouver par ce théorème le champ de pression dans le domaine $r \leq R$.

16.11. Déterminer l'équation d'une surface isobare et la représenter sur un schéma en coupe verticale contenant l'axe (Oz).

16.12. On se place au niveau du sol.

16.12.1. Exprimer la dépression $p(r)$ définie par $p(r) = P_0 - P(r)$ en fonction de la quantité Π et du rapport $\frac{r}{R}$. Représenter l'allure de la dépression en fonction de r. Calculer la valeur maximale $p_{\max}$ de $p(r)$ et la comparer à $P_0 = 1,0 bar$. Justifier que le centre de la tornade est l'endroit le plus dangereux.

16.12.2. Estimer la force exercée par m^2 de toiture lorsque la tornade passe au-dessus d'une maison et justifier qualitativement pourquoi une tornade passant au-dessus d'une maison a tendance à en arracher la toiture. Application numérique : un toit horizontal de masse par unité de surface de $100 kg.m^{-2}$ vous paraît-il en danger ? Vaut-il mieux laisser les fenêtres ouvertes ou fermées pour limiter les dégâts si une tornade arrive assez vite sur une maison ?

16.12.3. On suppose maintenant que la tornade étudiée se trouve en pleine mer (masse volumique de l'eau de mer supposée incompressible $\mu_e = 10^3 kg.m^{-3}$). On suppose également que l'eau de mer n'est pas entraînée par la tornade. En exprimant qu'il n'y a pas de discontinuité de pression à la traversée de la surface libre de l'eau, donner l'expression de la cote $\zeta(r)$ de cette surface sous l'effet de la dépression de la tornade. Représenter graphiquement la forme de la surface de la mer. Calculer littéralement et numériquement l'élévation maximale ζ_m. Commenter.

17. On s'intéresse dans cette question à un modèle de vortex plus réaliste pour lequel l'intensité de rotation (appelé aussi vorticité) décroît de $r = 0$ à $r \to +\infty$. Le vortex de BURGERS est une solution stationnaire exacte de type tourbillon. La diffusion visqueuse qui tend à atténuer le tourbillon est opposée par un écoulement d'étirement-compression qui tend à amplifier le tourbillon. L'écoulement s'écrit comme :

$$\vec{v} = \gamma \left(-r \vec{e_r} + \alpha z \vec{e_z} \right) + v_\theta(r) \vec{e_\theta}$$

où γ est le taux d'étirement (positif), α est un nombre à spécifier et $v_\theta(r)$ est la vitesse tournante.

17.1. Écrire la condition d'incompressibilité de l'écoulement et trouver la valeur de α.

17.2. Montrer que la vorticité $\vec{\omega} = \overrightarrow{rot} \vec{v}$ est selon $\vec{e_z}$ uniquement.

On montre que la vorticité est donnée par : $\vec{\omega} = \omega_0 \exp\left(-\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \vec{e_z}$, où ω_0 et r_0 sont deux constantes positives.

17.3. Donner une signification physique à r_0 ?

17.4. Exprimer $v_\theta(r)$.

17.5. Quel est le comportement asymptotique de $v_\theta(r)$ pour $\frac{r}{r_0} << 1$ et pour $\frac{r}{r_0} >> 1$. Retrouve-t-on le résultat de la question **8** ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/psi