Concours National Commun (CNC), Maroc

# Session 2005, filière TSI

## Mathématiques I

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème, première partie
- Problème, deuxième partie
- Problème, troisième partie

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2005/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

# Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

## Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.**
**L'usage de la calculatrice est interdit .**

*Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

## EXERCICE

1. (a) Si $c$ et $d$ sont deux réels et $k$ un entier naturel non nul, montrer que

$$\int_0^1 (ct^2+dt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2}.$$

   (b) En déduire qu'il existe un unique couple $(a,b)$ de réels tels que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

   (c) Calculer alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big)\,dt$ .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in ]0,\pi[$, $\quad 1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin\big((2n+1)\theta\big)}{\sin\theta}$.

3. Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   (a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt = \frac{f(0)-f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,dt$.

   (b) En déduire que la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers $0$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.

4. On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -\pi.$$

   (a) Montrer que $f$ est continue sur $[0,1]$.

   (b) Justifier que $f$ est dérivable sur $]0,1]$ et que $f'$ possède une limite finie à droite en $0$.

   (c) Montrer alors que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   (d) Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $\quad (at^2+bt)\Big(\frac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t\Big) = f(t)\sin\big((2n+1)\frac{\pi t}{2}\big)$.

   (e) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ ainsi que la valeur de sa somme.

# PROBLÈME

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si $f$ est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y'' + y = f. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

## Première partie

1. Montrer que l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

2. On note $\Sigma_\lambda$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin(\lambda x), \qquad (E_\lambda)$$

où $\lambda$ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique réel $a$, que l'on calculera, tel que la fonction

$$S_\lambda : \ x \longmapsto a\sin(\lambda x)$$

   soit un élément de $\Sigma_\lambda$.

   (b) Montrer alors que $\Sigma_\lambda = \{x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + S_\lambda(x) \quad ; \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

   (c) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle $(E_2)$ sont toutes $2\pi$-périodiques.

   (d) Montrer que la fonction $S_\lambda$ est périodique et préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(E_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions $2\pi$-périodiques.

## Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt.$$

1. Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que, pour tout réel $x$, $\quad \varphi(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$.

   (b) En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Montrer que $\varphi$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

3. Soit $g$ une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ ; montrer que la fonction $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et en déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel $x$,

$$g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt.$$

4. **Application :** Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h'' + h \geqslant 0$.

   (a) Vérifier que $h$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h'' + h$.

   (b) En déduire une expression de $h$ puis montrer que, pour tout réel $x$, $\quad h(x+\pi) + h(x) \geqslant 0$.

5. **Cas où $f$ est $2\pi$-périodique**

   On revient au cas général et on suppose que $f$ est en plus $2\pi$-périodique.

   (a) Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution $2\pi$-périodique $g$.

   i. Montrer alors que la fonction $\varphi$ est $2\pi$-périodique.

   ii. Montrer que, pour tout réel $x$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire que

   $$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0.$$

   (b) Réciproquement, montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont $2\pi$-périodiques.

   (c) Si $f$ est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions $2\pi$-périodiques ?

## Troisième partie

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et possédant une limite finie $\ell$ en $+\infty$.

1. (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel $x \geqslant A$, $\quad |f(x)| \leqslant 1 + |\ell|$.

   (b) Montrer alors que $f$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que la fonction $f'$ est positive et montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est convergente ; préciser la valeur de cette intégrale.

   (b) En déduire que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\sin t\,dt$ sont convergentes.

3. (a) Montrer que, pour tout réel $x$,

   $$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,dt.$$

   (b) En déduire que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est de la forme

   $$y_{\alpha,\beta} : x \longmapsto f(x) + \Big(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t\,dt\Big)\cos x + \Big(\beta - \int_0^x f'(t)\sin t\,dt\Big)\sin x,$$

   où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels.

   (c) Montrer alors que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

4. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ; on suppose que la solution $y_{\alpha,\beta}$ de $(\mathcal{E}_f)$ admet une limite finie en $+\infty$.

   (a) En étudiant la suite $\big(y_{\alpha,\beta}(n\pi)\big)_{n\geqslant 0}$, montrer que $\alpha = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$.

   (b) Trouver de même la valeur de $\beta$.

5. Montrer alors que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution, notée $Y_f$, ayant une limite finie en $+\infty$ à préciser, et que $Y_f$ est définie par

   $$Y_f(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Nombres complexes et trigonométrie
- Limites et continuité
- Équations différentielles linéaires
- Intégration sur un intervalle quelconque

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi