Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2019, filière TSI

Mathématiques I

Ce que traite le sujet

- Exercice : un peu de probabilité
- 1ère partie : formule de Taylor avec reste intégral ; application
- 2ème partie : application au développement en série entière d'une fonction absolument monotone
- 3ème partie : étude d'une équation différentielle linéaire
- 4ème partie : application à l'étude d'une équation intégrale

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2019/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

EXERCICE
Un peu de probabilité
(Noté sur 4 points sur 20)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction g_n de la variable réelle x par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. Pour tous $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{a} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a > 0$, établir une relation entre les intégrales $I_n(a)$ et $I_{n+2}(a)$ à l'aide d'une intégration par parties puis en déduire que $I_{n+2} = (n+1)\, I_n$.

2.2. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2.3. Calculer la valeur de l'intégrale I_1 et montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!.$$

3. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$

3.1. Démontrer que g est une densité de probabilité.

3.2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant g comme densité de probabilité. Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$ puis préciser leur valeur.

3.3. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives des variables aléatoires X et $Y = X^2$.

3.3.1. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de F et en déduire que Y est une variable à densité.

3.3.2. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de son espérance $E(Y)$ et de sa variance $V(Y)$.

PROBLÈME
Diverses applications de la formule de Taylor avec reste intégrale

Notations

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour tout $(r, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leqslant r$, on note $\binom{r}{k}$ le coefficient binomial défini par $\binom{r}{k} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$.

1ère Partie
Formule de Taylor avec reste intégrale ; application

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $(a, b) \in I^2$; on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

1.1. Formule de Taylor avec reste intégrale

1.1.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

1.1.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

1.2. Application au calcul de la somme d'une série

On considère la fonction $\psi :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, t > -1,\ \psi(t) = \ln(1+t).$$

1.2.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction ψ est n fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que

$$\forall\, t > -1,\ \psi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

1.2.2. Justifier que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

1.2.3. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale (1) à la fonction ψ sur un intervalle à préciser, déterminer la somme de la série précédente.

2ème Partie
Application au développement en série entière d'une fonction absolument monotone

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-a, a[$, avec $a > 0$, vérifiant :

$$\forall\, (n, x) \in \mathbb{N} \times]-a, a[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times]-a, a[$, on pose $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$.

2.1. Montrer que pour tout $x \in]-a, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + R_n(x).$$

2.2. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant f(x)$.

2.3. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ est convergente.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $x \in [0, a[$ et tout $y \in]x, a[$,

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

2.5. En déduire que, pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

2.6. Montrer que, pour tout $x \in]-a, 0[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ puis en déduire que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est convergente de somme $f(x)$.

3ème Partie
Étude d'une équation différentielle linéaire

Dans cette partie, on s'interesse à l'équation différentielle

$$y^{(4)} - y = 0. \qquad (E)$$

On désigne par Σ l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que φ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

3.1. Montrer que Σ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

3.2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x}.$$

3.2.1. Montrer que la fonction f_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, $\lambda^4 = 1$.

3.2.2. Préciser toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) de la forme f_λ, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.3. Un minorant de la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ

3.3.1. Les notations étant celles de la question **3.2.** précédente ; montrer que si λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 sont des complexes deux à deux distincts alors la famille $(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}, f_{\lambda_4})$ est libre.

3.3.2. En déduire que le $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ est de dimension $\geqslant 4$.

3.4. Étude d'une application linéaire

Soit t_0 un réel ; on considère l'application $\Delta : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}^4$, $\varphi \longmapsto \big(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)\big)$.

3.4.1. Vérifier que Δ est une application linéaire.

Dans la suite, on cherche à établir que l'application Δ est injective ; pour cela on considère une application $g \in \Sigma$ telle que $\Delta(g) = (0,0,0,0)$, c'est à dire que $g^{(k)}(t_0) = 0$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$.

3.4.2. Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \int_{t_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{6}\, g(s)\, \mathrm{d}s$.

3.4.3. Soit t un réel distinct de t_0 ; on note I_t le segment d'extrémités t_0 et t et on pose

$$M_t = \sup_{s\in I_t} |g(s)|, \quad \alpha_t = \frac{|t-t_0|^3}{6}.$$

(i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I_t$,

$$|g(x)| \leqslant M_t\, \alpha_t^k\, \frac{|x-t_0|^k}{k!}.$$

(ii) Justifier que la suite $\left(\alpha_t^n \frac{|t-t_0|^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

(iii) En déduire que $g(t) = 0$.

3.4.4. Conclure que Δ est injective et que la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel Σ est égale à 4 puis justifier que

$$\Sigma = \big\{x \longmapsto a\, e^x + b\, e^{-x} + c\, e^{ix} + d\, e^{-ix}\ ; \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\big\}.$$

4ème Partie
Application à l'étude d'une équation intégrale

L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **continues** *telles que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Soit donc $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une telle application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \int_0^x (x-t)^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.1. Montrer que la fonction g_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.

4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4.2.1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k \int_0^x t^{n-k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.2.2. En déduire que la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g_n' = n\, g_{n-1}$.

4.3. Recherche d'une équation différentielle vérifiée par f

4.3.1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = x + \dfrac{1}{6}\, g_3(x)$.

4.3.2. Justifier que la fonction f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y^{(4)} - y = 0.$$

4.3.3. En déduire qu'il existe des complexes a, b, c et d telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\, e^{x} + b\, e^{-x} + c\, e^{ix} + d\, e^{-ix}.$$

4.4. Déterminer les valeurs prises par $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$ et en déduire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\Big(\sin x + \sinh x\Big),$$

où sinh désigne la fonction sinus hyperbolique.

4.5. Synthèse : Vérifier que la solution trouvée à la question **4.4.** précédente vérifie bien l'équation intégrale (2).

Fin de l'épreuve

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Dérivabilité et convexité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Séries numériques et vectorielles
- Équations différentielles linéaires
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi