Concours National Commun (CNC), Maroc

Session 2021, filière TSI

Mathématiques I

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Exercice
- Problème 1, partie 1 : une variable aléatoire à densité
- Problème 1, partie 2 : calcul de deux intégrales
- Problème 2, partie 1 : développement asymptotique de H_n
- Problème 2, partie 2 : calcul d'une intégrale
- Problème 2, partie 3 : loi de Gumbel

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Sur cette copie, l'énoncé de la question 1 de la partie 2 du problème 2 est très pâle ; la formule à démontrer reste lisible.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/cnc/tsi/2021/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Exercice
(Noté 4 points sur 20)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

1. a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = 1$.

   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x^n e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}dx$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si elle admet pour densité la fonction θ définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie 1
Une variable aléatoire à densité

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

   Montrer que la fonction G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité g.

3. Soit X une variable aléatoire admettant g pour densité. On pose $Y = X^2$.

   a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   b) Déterminer, pour tout réel x, la probabilité $P(Y \leq x)$.
   (On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geq 0$).

   c) Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   d) Déterminer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

   e) En déduire que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ que l'on déterminera.

Partie 2
Calcul de deux intégrales

1. Montrer pour tout réel x, la convergence des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} 2t\sin(2xt)e^{-t^2}dt$$

Soient φ et ψ deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} 2t\sin(2xt)e^{-t^2}dt$$

2. a) Montrer que pour tous réels a et ε, on a l'inégalité $\left|\cos(a+\varepsilon) - \cos(a) + \varepsilon\sin a\right| \leq \dfrac{\varepsilon^2}{2}$.

   b) Montrer que pour tous réels x et h, $\left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\psi(x)\right| \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}h^2$.

   c) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée φ'.

3. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel x, $\psi(x) = 2x\varphi(x)$.

   b) En déduire que pour tout réel x, $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ et $\psi(x) = x\sqrt{\pi}e^{-x^2}$.

Problème 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

Partie 1
Développement asymptotique de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$

1. a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

   b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

   c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

e) En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

b) Vérifier que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{2}{n^3}$ puis que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$.

c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Partie 2
Calcul d'une intégrale

On se propose de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-\ln u)e^{-u}du$.
On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$I_{n,k} = \int_0^n \ln(u)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du \quad \text{et } I_n = I_{n,n}$$

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k,

$$I_{n,k} = I_{n,k-1} + \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$\frac{k+1}{k} I_{n,k} = I_{n,k-1} - \frac{n}{k(k+1)}$$

3. On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k, $J_{n,k} = (k+1)I_{n,k}$.

a) Déterminer pour tous entiers naturels non nuls n et k, une relation entre $J_{n,k}$ et $J_{n,k-1}$.

b) En déduire pour tout entier naturel non nul n, I_n en fonction de n et u_n.

4. En admettant que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (-\ln u)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} (-\ln u)e^{-u}du$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} (-\ln u)e^{-u}du$.

Partie 3

Application à la loi de Gumbel

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \exp(-t - e^{-t})$.

1. a) Montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et donner sa valeur, (on pourra utiliser la fonction $t \mapsto \exp(-e^{-t})$).

   b) Justifier que g est une densité d'une variable aléatoire qu'on notera X. La loi suivie par X est appelée loi de Gumbel.

   c) Déterminer F_X la fonction de répartition de X.

2. a) Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\exp(-t - e^{-t})dt$.

   b) À l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$, déterminer la valeur de $E(X)$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si elle admet pour densité la fonction θ définie par $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

   On pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $G_n = M_n - \ln(n)$. On note F_{M_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n et F_{G_n} celle de la variable aléatoire G_n.

   a) Déterminer F_{X_1} la fonction de répartition de X_1.

   b) Déterminer la fonction F_{M_n}.

   c) En déduire la fonction F_{G_n}.

4. Montrer que la suite $(M_n - \ln n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers X.

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Nombres réels et suites numériques
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/cnc/tsi